10033480

JAN ZYDLER

GEOMETRJA
W ZAKRESIE SZKOŁY ŚREDNIEJ

WYDANIE PIĘTNASTE
PRZEJRZANE I POPRAWIONE
Z 390 RYSUNKAMI W TEKŚCIE

...a wymagań
...młodocianego
...ile tylko można,
...rozdziałów, które,
...pojęcia i rozwa...

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE
1927

DRUKARNIA ZAKŁADÓW WYDAWNICZYCH
M. ARCT, SP. AKC W WARSZAWIE
CZERNIAKOWSKA 225

9659./c
51

PRZEDMOWA DO WYDANIA XIV.

Wydanie niniejsze, jak to zresztą ze spisu rozdziałów widać, jest próbą ścisłego wykonania programu geometrji, obecnie w gimnazjach naszych obowiązującego. Kolejność rozdziałów i paragrafów uzgodniona jest właśnie z tym programem, a jedyne odstępstwo, na które autor sobie pozwolił, jest pominięcie wiadomości o rzucie prostokątnym na dwie płaszczyzny, czyli pewnego rozdziału z geometrji wykreślnej. Istnienie jednak odrębnego podręcznika z tej dziedziny może autora usprawiedliwić.

W obecnem wydaniu znajdzie czytelnik, co najmniej w połowie książki, zupełnie nowe opracowanie materjału, co było konieczne dla dostosowania jej do teraźniejszych wymagań, a w każdym rozdziale dodane są ćwiczenia w liczbie wystarczającej dla utrwalenia przez ucznia nabytej wiedzy oraz możności stawiania pierwszych kroków w samodzielnem rozumowaniu i rozwiązywaniu zadań.

Autor zdawał sobie sprawę z trudności pogodzenia wymagań ścisłości naukowej z praktyką szkolną i pojemnością młodocianego umysłu i cały wysiłek położył na to, aby naukę, ile tylko można, udostępnić. Dotyczy to szczególniej pierwszych rozdziałów, które, powiedzmy otwarcie, zawierają bardzo subtelne pojęcia i rozważania logiczne, a z konieczności muszą być podawane umysłom bardzo jeszcze młodym. Jakże ostrożnie trzeba postępować, żeby niemi nie odstraszyć, ale raczej zaciekawić i do nauki zachęcić! Dlatego też autor celowo nie podaje spisu pewników, na których oparty jest wykład, natomiast posługuje się niemi stopniowo i oględnie, rozumiejąc, że dopiero pod koniec nauki zadaniem nauczyciela jest zgrupować je i uporządkować.

J. Z.

Warszawa, 15 marca 1925 r.

PRZEDMOWA DO WYDANIA XV.

Wydanie obecne zasadniczych zmian w sobie nie zawiera; dokonano poprawek i niektórych uzupełnień, niezbędnych wskutek usterek, jakie się wkradły do wydania poprzedniego. Jedne z nich zauważył autor, ale niestety, zbyt późno, aby je można było w druku skorygować, wykrycie innych zawdzięcza on światłej krytyce.

Autor żywi nadzieję, że usunięcie tych braków wpłynęło na podniesienie wartości książki.

Wreszcie mała uwaga: dla oznaczenia równoważności figur autor (idąc za Weberem i Wellsteinem) użył odrębnego znaku który jednak w odbitce wypadł niezupełnie szczęśliwie, jako mogący przypominać znak podobieństwa. Może dla uniknięcia nieporozumienia dobrze byłoby w praktyce szkolnej używać go z kreską u dołu.

J. Z.

Warszawa, 11 lipca 1927 r.

SPIS RZECZY.

Str.

Rozdział I. Pojęcia wstępne.

1. Utwory podstawowe. Niektóre wiadomości ogólne . . 1
2. Prosta. Półprosta. Odcinek 6
3. Płaszczyzna 12
4. Ćwiczenia 14
5. Kąt 14
6. Ćwiczenia 21
7. Wiadomości wstępne o kole 22
8. Wiadomości wstępne o trójkącie i wielokącie . . . 25
9. Ćwiczenia 28

Rozdział II. Równość i symetrja figur płaskich.

10. Równość trójkątów 29
11. Konstrukcje podstawowe 35
12. Zależności między elementami trójkąta 41
13. Prostopadła i pochyła. Trójkąty prostokątne . . . 49
14. O miejscu geometrycznem punktów 54
15. Symetrja figur płaskich 56
16. Ćwiczenia 61

Rozdział III. Proste równoległe.

17. Kąty przy równoległych. Postulat Euklidesa . . . 63
18. Ćwiczenia 72
19. Suma kątów trójkąta i wielokąta 73
20. Ćwiczenia 74
21. Równoległoboki i ich własności. Trapez 75
22. Ćwiczenia 80
23. Punkty szczególne w trójkącie 81

Rozdział IV. Koło.

24. Położenie prostej względem koła 85
25. Własności średnicy. Odległość punktu od okręgu . . 89
26. Własności łuków i cięciw 91
27. Położenie dwu kół względem siebie 94
28. O zadaniach konstrukcyjnych 98
29. Ćwiczenia 105

Str.

Rozdział V. Kąty w kole. Czworokąty wpisane i opisane.

30. Kąty w kole 107
31. Czworokąty wpisane i opisane 113
32. Ćwiczenia 115

Rozdział VI. Równoważność wielokątów.

33. Określenie równoważności wielokątów. Zasadnicze własności związku równoważności 117
34. Równoważność równoległoboków, trójkątów i trapezów . 122
35. Zadania konstrukcyjne 127
36. Twierdzenie Pitagorasa i jego uogólnienie . . . 134
37. Ćwiczenia 139

Rozdział VII. Położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

38. Prosta i płaszczyzna do siebie prostopadłe . . . 141
39. „ „ „ „ równoległe . . . 151
40. Płaszczyzny do siebie równoległe 152
41. „ „ „ prostopadłe 156
42. Pojęcie o rzucie środkowym i ukośnym. Twierdzenie Desarguesa 158
43. Ćwiczenia 166

Rozdział VIII. Geometryczna proporcjonalność odcinków.

44. Odcinki spółmierne i niespółmierne. Twierdzenie Talesa dla odcinków spółmiernych 167
45. Geometryczna definicja odcinków proporcjonalnych . . 171
46. Zastosowania twierdzenia Talesa 176
47. Ćwiczenia 182

Rozdział IX. Jednokładność i podobieństwo.

48. Definicja i budowanie figur jednokładnych . . . 184
49. Podobieństwo trójkątów. Odcinki proporcjonalne w trójkącie i kole 190
50. Metoda przekształcenia jednokładnego w zadaniach konstrukcyjnych 200
51. Ćwiczenia 204

Rozdział X. Definicja metryczna odcinków proporcjonalnych.

52. O mierzeniu odcinków 206
53. Mierzenie kątów i łuków 212
54. Metryczna definicja odcinków proporcjonalnych . . . 214
55. Związki metryczne między odcinkami w trójkącie i kole . 217
56. O linjach poprzecznych w trójkącie 225
57. Potęga punktu względem koła 229
58. O algebraicznej metodzie konstrukcyj geometrycznych . 233
59. Wielokąty foremne 238
60. Ćwiczenia 248

Str.

Rozdział XI. Trygonometryczne funkcje kąta ostrego.

61. Określenie trygon. funkcyj kąta ostrego 252
62. Zasadnicze własności trygon. funkcyj 255
63. Związki między tryg. funkcjami tego samego kąta . . 262
64. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych 263
65. Ćwiczenia 266

Rozdział XII. Obliczanie pól wielokątów.

66. Pojęcie pola. Pola wielokątów 269
67. Stosunek pól wielokątów podobnych 277
68. Zadania konstrukcyjne 280
69. Ćwiczenia 283

Rozdział XIII. Naroża i wielościany.

70. Kąt bryłowy. Własność kątów płaskich i dwuściennych w narożu trójściennem 287
71. Równość i symetrja naroży trójściennych 290
72. Pojęcie wielościanu wypukłego. Graniastosłup, pole jego powierzchni 293
73. Ostrosłup. Pole jego powierzchni 298
74. Wielościany foremne 303
75. Graniastosłupy równoważne. Objętość graniastosłupa . . 309
76. Ćwiczenia 313

Rozdział XIV. Zastosowanie pojęcia granicy w geometrji.

77. Pomiar długości okręgu i pola koła 316
78. O sposobach obliczania liczby π. Kwadratura koła . . 323
79. Objętość ostrosłupa 326
80. Ćwiczenia 333

Rozdział XV. Bryły obrotowe.

81. Walec 336
82. Stożek 339
83. Kula 343
84. Ćwiczenia 359
Skorowidz 365

ROZDZIAŁ I.

Pojęcia wstępne.

§ 1. Utwory podstawowe. Niektóre wiadomości ogólne.

1. Przedmioty, czyli ciała materjalne, które nas otaczają bądź to w pokoju, bądź na ulicach miasta, odznaczają się najróżnorodniejszemi cechami, wszystkie one jednak mają jedną cechę wspólną—zwaną rozciągłością—mianowicie, każde z nich zajmuje pewną część przestrzeni; tę właśnie część przestrzeni, którą zajmuje przedmiot, nazywamy ciałem geometrycznem.

Rozróżniamy trzy wymiary ciała geometrycznego: długość, szerokość i wysokość. Widzimy je bez trudu w pokoju, łatwo spostrzegamy wymiary pudełka, skrzyni i t. p.

Wysokość nosi niekiedy nazwę głębokości, np. głębokość studni; zamiast szerokości mówimy o grubości muru.

2. Ciało geometryczne jest oddzielone od innego ciała, lub od otaczającej je przestrzeni, powierzchniami. Sala, w której się znajdujemy, jest oddzielona od pozostałej części gmachu czterema ścianami, posadzką i sufitem. Budynek szkolny jest oddzielony od otaczającej go przestrzeni, czyli jest ograniczony, powierzchniami ścian zewnętrznych, powierzchnią ziemi oraz dachu.

Powierzchnia ma dwa wymiary: długość i szerokość.

3. Powierzchnię można ograniczyć, lub oddzielić od innych powierzchni, linjami.

Linja ma tylko jeden wymiar—długość.

4. Linję można ograniczyć punktem, który żadnego wymiaru nie posiada.

5. Ciało geometryczne, czyli bryła, powierzchnia, linja i punkt, nazywają się utworami geometrycznemi.

6. Jakkolwiek powierzchni nie możemy w rzeczywistości oderwać od bryły, linji od powierzchni, a punktu od linji, to jednak będziemy je traktowali w naszej nauce niezależnie od utworu geometrycznego, do którego należą, dla tem dokładniejszego zbadania ich własności.

Koniec ostrej igły daje wyobrażenie punktu, bardzo cienka nitka, drucik lub włos—linji, a bardzo cienka blaszka—powierzchni. Są to jednak tylko wyobrażenia utworów geometrycznych, które istnieją jedynie w naszej myśli.

7. Przedmiot, który się znajduje w naszem otoczeniu, np. pudełko, leżące na stole, możemy przenieść w inne miejsce pokoju; powiadamy wtedy, że ten przedmiot wykonał pewien r u c h. Oczywiście, razem z pudełkiem poruszają się wszystkie jego elementy, więc ściany, dno i pokrywa, krawędzie i wierzchołki.

Odrywając myśl od ciała materjalnego, możemy pomyśleć i traktować ruch idealnej powierzchni, linji i punktu niezależnie od ciała, do którego one należą.

P u n k t, poruszający się w przestrzeni, o p i s u j e l i n j ę.

Tak np., jadąc w nocy wagonem kolei żelaznej, widzimy czerwone nitki, powstałe przez ruch rozżarzonych drobnych odpadków węgla, i otrzymujemy w ten sposób wyobrażenie linji. Obserwując niebo w pogodną noc sierpniową, widzimy często srebrno-świetlane linje, otrzymane przez spadające gwiazdy.

L i n j a, kiedy porusza się w przestrzeni, opisuje powierzchnię.

Koło szybko biegnącego wozu robi wrażenie pokrytego powierzchnią, powstałą przez ruch szprych kołowych.

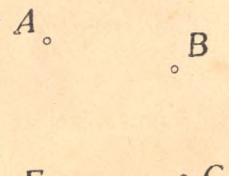
Wreszcie przez ciągły r u c h p o w i e r z c h n i możemy otrzymać ciało geometryczne czyli b r y ł ę. Blacha żelazna, rozżarzona na czerwono, spadając w ciemności z góry na dół, daje wyobrażenie ciała geometrycznego w postaci czerwonego słupa.

Można więc powiedzieć, że jest jeden zasadniczy utwór geometryczny, mianowicie punkt (bezwymiarowy), przez ruch którego powstaje utwór jednowymiarowy — linja, przez ruch linji powstaje utwór dwuwymiarowy—powierzchnia, wreszcie przez ruch powierzchni utwór trójwymiarowy—bryła.

8. Dla lepszego zrozumienia i uprzystępnienia sobie nauki posługiwać się będziemy rysunkiem, należy jednak pamiętać, że rysunek, choćby najstaranniej wykonany, nigdy nie będzie utworem geometrycznym, o którym mówimy, ale tylko jego uzmysłowieniem.

Oznaczając na papierze punkt przez nakłucie zaostrzonym ołówkiem, lub na tablicy przez naciśnięcie kawałkiem kredy, otrzymujemy wyobrażenie punktu, mniej lub więcej dokładne, zależnie od grubości końca ołówka lub kredy.

Dla odróżnienia na rysunku jednego punktu od innych oznaczamy je literami (najczęściej wielkiemi), napisanemi obok punktu, np. punkty: A, B, C (rys. 1).



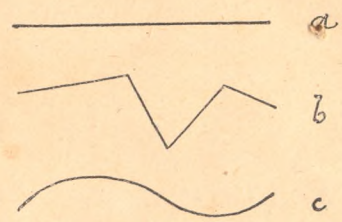
Rys. 1.

Niekiedy oznaczamy je tą samą literą, zwłaszcza jeżeli mamy na myśli punkty o pokrewnej własności, odróżniając je wtedy numerami, np. A_1, A_2, A_3 (czytaj: A pierwsze, A drugie i t. d.) lub kreskami, np. A', A'', A''' (czytaj: A jeden, A dwa, A trzy i t. d.).

9. Linje mogą być p r o s t e, ł a m a n e i k r z y w e.

Co to jest linja prosta (rys. 2a) określać uie będziemy—jest to pojęcie dla każdego zrozumiałe.

Linja, która nie jest prostą, ale składa się z części prostych, nazywa się ł a m a n ą (rys. 2b); wszelka zaś linja, która nie jest prostą i nie składa się z części prostych, nazywa się k r z y w ą (rys. 2c).



Rys. 2.

Do kreślenia (w celu uzmysłowienia, o którem poprzednio mówiliśmy) na papierze lub na tablicy linji prostej posługujemy się l i n j a ł e m (lub ekierką), pociągając wzdłuż jego brzegu ołówkiem lub kredą. Cieśla, lub stolarz, posługuje się w tym celu wyciągniętym sznurkiem, nacierając go węglem lub kredą, które po wstrząśnięciu sznurka pozostawiają na desce ślad linji prostej.

Z linij krzywych największe ma zastosowanie i najdawniej jest człowiekowi znana l i n j a k o ł o w a czyli o k r ą g. Do praktycznego wykreślania tej linji służy przyrząd powszechnie znany, a zarówno dla uczonego geometry, jak dla rzemieślnika niezbędny — c y r k i e l.

Cyrkiel i linjał są to dwa przyrządy, bez których geometra obejść się nie może, a przy ich pomocy rozwiązuje się w praktyce najróżnorodniejsze zagadnienia geometryczne.

10. Powierzchnie bywają płaskie i krzywe.

Każdy z nas rozumie, co to jest powierzchnia płaska czyli płaszczyzna. Wyobrażenie płaszczyzny daje powierzchnia dobrze oszlifowanego lustra, powierzchnia wody lub wogóle cieczy, nalanej do naczynia i pozostawionej w spokoju, powierzchnia gładkiej posadzki i t. p.

11. Punkt, prosta i płaszczyzna są to elementarne czyli podstawowe utwory geometryczne.

12. Wszelkie połączenie punktów, linij i powierzchni nazywa się figurą geometryczną.

Nauka, która bada własności figur, jako też związki, jakie zachodzą między niemi, nazywa się geometrją.

13. Prawdy, które wykrywa i któremi posługuje się nauka geometrji, są ściśle od siebie uzależnione, a dalsze wynikają z poprzednich.

W naszym wykładzie za podstawę weźmiemy pewne prawdy, do których dochodzimy przez doświadczenie lub intuicję, które uznajemy za oczywiste i przyjmujemy je bez uzasadniania, jako prawdy podstawowe, a z nich wysnuwamy dalsze. Takie prawdy nazywają się pewnikami czyli aksjomatami. Niekiedy noszą one nazwę postulatów. Zapoznamy się z niemi w ciągu dalszej nauki.

14. Prawda, która wynika z pewników, nazywa się twierdzeniem. Rozumowanie, które wykazuje prawdziwość twierdzenia, nazywa się dowodem.

Poznaliśmy w arytmetyce niektóre twierdzenia, np.:

a) Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 4, to jest podzielna przez 12.

b) Jeżeli t. zw. suma cyfr danej liczby dzieli się bez reszty przez 9, to i dana liczba dzieli się przez 9.

Najogólniejszą postacią twierdzenia będzie następujące:

c) „Jeżeli jest A, to jest także i B".

Twierdzenie składa się z dwóch części: założenia (jeżeli...) i konkluzji czyli tezy (to...)

Twierdzenie, które powstało z danego przez odwrócenie założenia i konkluzji, nazywa się odwrotnem względem danego. Np. można wypowiedzieć następujące twierdzenia odwrotne względem poprzednio podanych:

a) Jeżeli liczba jest podzielna przez 12, to jest także podzielna przez 3 i przez 4.

b) Jeżeli liczba jest podzielna przez 9, to jej suma cyfr dzieli się przez 9.

c) „Jeżeli jest B, to jest także A."

Nie każde jednak twierdzenie odwrotne jest prawdziwe. Np. twierdzenie: „Jeżeli liczba jest podzielna przez 12, to jest podzielna także przez 2 i przez 6" odwrócone być nie może.

15. Prawda, która wynika bezpośrednio z dowiedzionego twierdzenia i odrębnego dowodu nie wymaga, nazywa się wnioskiem.

16. Obok pewników i twierdzeń ważną w nauce geometrji odgrywają rolę: określenia, które służą do wyjaśnienia nowych pojęć, oraz zadania, których rozwiązanie polega na zbudowaniu czyli konstrukcji pewnej figury na mocy poznanych twierdzeń i pewników.

17. Wyraz „geometrja" jest pochodzenia greckiego i oznacza dosłownie „mierzenie ziemi" (*ge* = ziemia, *metreo* = mierzę), dlatego że pierwotnie takie miała zadanie ta nauka.

18. *Uwaga.* Geometrja narodziła się najprawdopodobniej w Egipcie, a znakomity historyk grecki *Herodot* z V wieku przed Chrystusem tak tłumaczy powstanie tej umiejętności:

„Król Sezostrys nakazał podział ziemi, przeznaczając dla każdego Egipcjanina po kwadratowym kawałku ziemi, który losowano, obowiązując się płacić pewien czynsz roczny do skarbu królewskiego. W razie wylewu rzeki Nilu posiadacz zalanego gruntu zwracał się do króla, który posyłał mierników dla wymierzenia i sprawdzenia, ile gruntu uprawnego pozostało i o ile należało zmniejszyć opłatę czynszową. Oto, zdaniem mojem, jest początek geometrji, która stąd już przeszła do Grecji".

W pierwszych początkach geometrja uwzględniała tylko zagadnienia praktyczne i jakkolwiek Egipcjanie doszli w bardzo odległych czasach do wielkiej wprawy i biegłości w ich rozwiązywaniu, to jednak jeszcze nie można twierdzić, żeby oni byli twórcami geometrji rozumowej czyli nauki geometrji, chociaż pewne uogólnienia teoretyczne nie były im obce.

Najdawniejszy zabytek matematyczny, tak zwany egipski *Papyrus Rhinda*, pochodzący z czasów 2000—1700 roku przed Chrystusem, napisany przez *Ahmesa*, a stosunkowo niedawno odczytany (1879 r.), dowodzi, że już

w owych tak odległych czasach znano sposoby mierzenia powierzchni i objętości niektórych figur.

Zasługa stworzenia teoretycznej geometrji należy się niewątpliwie Grekom.

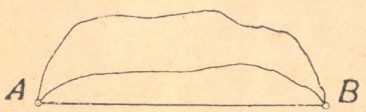
Najdawniejszą książką polską, traktującą o geometrji, jest napisana przez *Stanisława Grzepskiego*, profesora Akademji Krakowskiej: „Geometria to iest Miernicka Nauka po polsku krótko napisana z graeckich i łacińskich ksiąg. Naydziesz też tu iako naszy miernicy zwykli mierzyć imienie na włoki albo łany. Item iugerum romanum, iako wiele ma w sobie. Item iako wieżę, albo co inszego wysokiego zmierzyć, albo dalekość iaką etc.

Teraz nowo wydana, roku 1566 w Krakowie."

Książka ta ma już dzisiaj tylko wartość historycznego zabytku.

§ 2. Prosta. Półprosta. Odcinek.

19. Każda linja prosta, albo krócej każda prosta, ma pewne własności, które ją odróżniają od innych linij. Poznajemy je z doświadczenia, a niektóre z nich, jak to zaraz zobaczymy, wydadzą się tak oczywiste, że nikomu nawet na myśl nie przyjdzie poddawać je w wątpliwość, wyszczególnimy je jednak tutaj ze względu na to, że w następstwie wypadnie na nie się powoływać. Przedewszystkiem tedy spostrzegamy, że od jednego punktu do jakiegokolwiek drugiego, np. A i B (rys 3), wiele może prowadzić dróg, ale prosta jest tylko jedna. Tę własność prostej wyrażamy w postaci następującego **pewnika:**



Rys. 3.

P r z e z d w a p u n k t y można zawsze poprowadzić prostą, a l e t y l k o j e d n ą.

Inaczej ten pewnik można wyrazić, mówiąc:

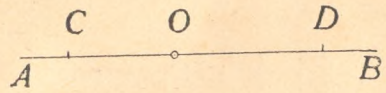
d w a p u n k t y w z u p e ł n o ś c i w y z n a c z a j ą p r o s t ą.

Na rysunku oznaczamy zwykle prostą 2-ma literami, oznaczającemi punkty, przez które ona przechodzi, np. prosta AB.

20. Na linji prostej możemy zawsze pomyśleć dowolne dwa punkty, a jakkolwiek daleko od siebie je obierzemy, zawsze możemy znaleźć dalsze, poza niemi jeszcze dalsze i t. d., a zatem zawsze możemy prostą przedłużać dowolnie. To też kiedy mówimy o prostej, rozumiemy, że

p r o s t a j e s t l i n j ą n i e o g r a n i c z o n ą.

21. Na prostej AB (rys. 4) weźmy jakikolwiek punkt O; zawsze na tej prostej można pomyśleć takie dwa punkty, np. C i D, że dla przejścia od C do D (lub od D do C) musimy przejść przez punkt O. Widzimy więc, że punkt O d z i e l i prostą AB na dwie części: na jednej z tych części leży punkt C, na drugiej punkt D.



Rys. 4.

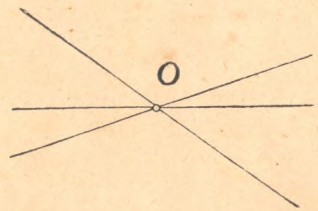
Tę własność linji prostej wyrażamy **pewnikiem:**

K a ż d y p u n k t, p o ł o ż o n y n a p r o s t e j, d z i e l i j ą n a d w i e c z ę ś c i.

Każda z tych części zawierać będzie, na zasadzie poprzedniej własności linji prostej, nieskończoną ilość punktów i każda z nich nazywa się p ó ł p r o s t ą lub p r o m i e n i e m, np. półproste OA i OB. Punkt O nazywamy p o c z ą t k i e m półprostej.

O 2-ch punktach linji prostej będziemy mówili, że leżą z j e d n e j s t r o n y punktu O, albo z p r z e c i w n y c h jego s t r o n, zależnie od tego, czy obydwa leżą na tej samej półprostej, czy też jeden punkt leży na jednej, a 2-gi na drugiej półprostej.

22. Z przytoczonych wyżej własności linji prostej wnioskujemy, że jeżeli dwie proste mają dwa punkty wspólne, to wszystkie ich punkty są wspólne, czyli te proste będą do siebie przystawały, t. j. będą tworzyły jedną prostą. A zatem dwie proste mogą mieć co najwyżej jeden punkt wspólny.



Rys. 5.

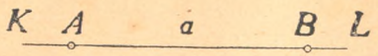
Powiadamy wtedy, że dane proste p r z e c i n a j ą s i ę z sobą. Otrzymujemy więc następującą prawdę, jako

Wniosek. D w i e p r o s t e m o g ą s i ę p r z e c i n a ć z s o b ą t y l k o w j e d n y m p u n k c i e.

23. Jak wiemy, jeden punkt nie wyznacza linji prostej i mając jakiś punkt na płaszczyźnie, możemy przez niego poprowadzić dowolną ilość prostych, które tworzą tak zwany p ę k prostych (**rys.** 5).

Punkt, przez który przechodzą wszystkie proste, nazywa się początkiem lub wierzchołkiem pęku.

24. Niech będzie dana prosta KL (rys. 6) i na niej dwa punkty: A i B; część AB danej prostej, ograniczona dwoma punktami, nazywa się odcinkiem prostej, albo poprostu: odcinkiem.



Rys. 6.

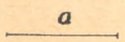
Dwie pozostałe części prostej: AK i BL nazywamy przedłużeniami odcinka AB.

Odcinek oznacza się dwiema literami, które wskazują punkty ograniczające go, czyli jego końcowe punkty (krócej: końce), np. odcinek AB, albo jedną literą małego alfabetu, np. odcinek a.

O odcinku mówimy, że łączy dwa punkty dane. Odcinkiem wyznacza się odległość dwóch danych punktów.

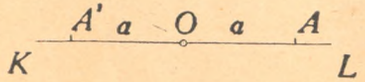
Punkty, położone na odcinku AB, nazywamy wewnętrznemi, położone zaś na jego przedłużeniu—zewnętrznemi.

25. Punkty danego odcinka AB możemy uważać, jako następujące po sobie, począwszy od A i kończąc na B, albo też odwrotnie—od B do A. Możemy więc mówić o dwóch zwrotach odcinka, niekiedy nawet wyraźnie je rozróżniamy; jeżeli jednak o zwrot odcinka nam nie chodzi, mamy zaś na myśli tylko odległość jego końcowych punktów, to powiadamy, że odcinek AB jest równy odcinkowi BA i piszemy:



$$AB = BA.$$

W praktyce przekonywamy się o tem łatwo, mierząc cyrklem dany odcinek.



Rys. 7.

26. Niech będzie dany odcinek a, prosta KL i na niej pewien punkt O (rys. 7). Rozważając każdą z otrzymanych półprostych zosobna, np. OL, spostrzegamy, że z pomiędzy nieograniczonej liczby jej punktów znajdziemy jeden taki, którego odległość od O będzie równa a (to samo powiemy o półprostej OK).

Tę własność prostej uważamy za **pewnik,** powiadając:

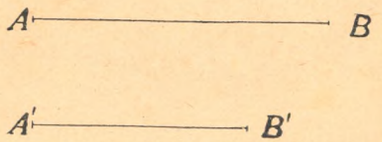
Z każdej strony punktu O, danego na prostej, można zawsze znaleźć taki punkt A, ale tylko jeden, że OA równa się odcinkowi danemu.

W praktyce robimy to w ten sposób, że wziąwszy w cyrkiel odcinek a, odmierzamy go na prostej KL od punktu O, otrzymujemy z każdej strony tego punktu odcinek $OA = OA' = a$. W ten sposób „przenosimy" odcinek dany na prostą, rozumiejąc, że w istocie to „przenoszenie" jest równoznaczne ze znalezieniem odcinka równego danemu.

27. Odcinki mogą być równe i nierówne.

O istnieniu odcinków równych lub nierównych przekonywamy się z łatwego doświadczenia, zestawiając ze sobą dwa wyprostowane pręciki metalowe: jeżeli obydwa ich końce do siebie przystają, powiadamy, że te pręty są równe, w przeciwnym razie—są nierówne.

Jeżeli mamy dane dwa odcinki: AB i $A'B'$ (rys. 8), to w praktyce, dla porównania ich ze sobą, przenosimy odcinek $A'B'$ na AB w taki sposób, aby punkt A' padł na A, wtedy:



Rys. 8.

1) drugi koniec odcinka $A'B'$, t.j. punkt B', padnie wewnątrz odcinka AB, wówczas powiemy, że pierwszy odcinek jest większy od drugiego:

$$AB > A'B';$$

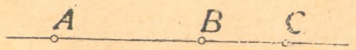
albo 2) punkt B' padnie na B, wtedy mówimy, że odcinki do siebie przystają, czyli są sobie równe:

$$AB = A'B';$$

albo 3) punkt B' padnie na przedłużenie odcinka AB, wtedy mówimy, że pierwszy jest mniejszy od drugiego:

$$AB < A'B'.$$

28. Jeżeli na danej prostej weźmiemy 3 punkty: A, B i C (rys. 9), to odcinek BC leży na przedłużeniu AB i ma z nim jeden punkt B wspólny; takie odcinki nazywać będziemy kolejnemi.



Rys. 9.

Trzeci otrzymany odcinek AC nazywa się wtedy sumą odcinków AB i BC, co wyrażamy, pisząc:

$$AC = AB + BC.$$

Wogóle, jeżeli mamy dwa jakiekolwiek odcinki a i b (niekolejne), to możemy jeden z nich „przenieść" i umieścić na przedłużeniu drugiego, czyniąc je kolejnemi i otrzymać w ten sposób trzeci odcinek c, który będzie ich sumą:

$$c = a + b.$$

Znajdowanie sumy odcinków nazywa się ich dodawaniem.

29. Jeżeli mamy dwa kolejne odcinki AB i BC (rys. 9), to każdy z nich nazywa się różnicą pomiędzy AC a pozostałym odcinkiem:

$$AB = AC - BC,$$
$$BC = AC - AB.$$

Znajdowanie różnicy dwóch odcinków nazywa się ich odejmowaniem.

W praktyce, aby odjąć od siebie dwa jakiekolwiek odcinki a i b, należy mniejszy odcinek „przenieść" na większy w taki sposób, aby miały jeden punkt końcowy wspólny, wtedy pozostała część większego odcinka *(a)* będzie różnicą $a-b$ odcinków danych.

30. Dodawanie można rozciągnąć na dowolną liczbę składników, dodając naprzód do siebie pierwsze dwa odcinki, do otrzymanej sumy dodając trzeci itd.

Można łatwo udowodnić, że sumowanie odcinków podlega ogólnym prawom dodawania, a zatem prawu przemienności i łączności:

$$a + b + c = b + a + c = c + a + b,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

31. Możemy dany odcinek a przedłużyć i odmierzając go jeszcze raz, dwa razy itd., wogóle możemy otrzymać odcinek k, będący sumą n równych odcinków a, czyli n-tą wielokrotność odcinka a:

$$k = n \,.\, a.$$

Nawzajem, odcinek a będzie wtedy n-tą częścią całego odcinka k.

32. Widzimy zatem, że odcinki możemy ze sobą porównywać, możemy na nich wykonywać działania, jak na liczbach. Do odcinków mają zastosowanie **pewniki** charakteru ogólnego:

1) Dwa odcinki, z których każdy zosobna równa się trzeciemu, są sobie równe:

jeżeli $a = c$
i $b = c$
to $a = b.$

2) Jeżeli do odcinków równych dodamy równe, albo od odcinków równych odejmiemy równe, to otrzymane sumy albo różnice będą równe:

jeżeli $a = b,$
to $a \pm m = b \pm m.$

3) Jeżeli mamy dwa odcinki nierówne: $a > b$, to zawsze możemy znaleźć tak wielką liczbę n, że będzie $n \,.\, b > a$.

Pewnik ten należy rozumieć w taki sposób, że chociażby odcinek b był bardzo mały w porównaniu z a, to jednak przez kolejne odmierzanie go na a, zawsze możemy dojść do tego, że wprawdzie po $(n\text{-}1)$ odmierzeniu jeszcze będzie $(n\text{-}1) \,.\, b < a$, ale po następnem n-tem odmierzeniu będzie już $n \,.\, b \geqslant a$, czyli otrzymamy:

$$(n-1) \,.\, b < a \leqslant n \,.\, b.$$

W ten sposób zawsze możemy odcinkiem mniejszym b wyczerpać odcinek większy a.

33. *Uwaga.* Ostatni z podanych pewników nosi nazwę pewnika *Archimedesa*, znakomitego matematyka i fizyka greckiego z III wieku przed Chrystusem (287—212 r.). Jest to najpotężniejszy z umysłów świata starożytnego Urodził się Archimedes w Syrakuzach, a nauki pobierał prawdopodobnie w Aleksandrji. Jego obrona Syrakuz przed Rzymianami przeszła do historji: dzięki machinom jego wynalazku miasto mogło w przeciągu trzech lat opierać się licznej oblegającej je armji, dopóki Rzymianie podstępem nie wtargnęli do miasta, a podczas szturmu Archimedes zginął z ręki żołdaka rzymskiego.

Archimedes był umysłem nawskroś oryginalnym i wszechstronnym: nie zadawalał się on dotychczasowemi znanemi metodami, stwarzał nowe, budzące dziś jeszcze podziw, i to nie tylko w dziedzinie czystej nauki matematyki, ale i w jej zastosowaniach (fizyce), wszędzie zostawiając potężne ślady swego genjalnego umysłu.

Warto tu nadmienić, że stosunkowo bardzo niedawno, bo w 1899 r., udało się jednemu z uczonych paleografów odnaleźć rękopis Archimedesa, zawierający pracę doniosłej wartości naukowej i świadczący, że Archimedes już stwarzał początki jednej bardzo ważnej gałęzi nauki matematycznej, która dopiero w 20 wieków po nim, bo w XVII w., stała się znaną w świecie naukowym.

§ 3. Płaszczyzna.

34. Doświadczenie nasuwa nam myśl, że każda płaszczyzna ma następującą własność:

Przez trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, zawsze można poprowadzić płaszczyznę, ale tylko jedną.

Inaczej ten **pewnik** można wyrazić, mówiąc:

trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, w zupełności wyznaczają płaszczyznę.

Ponieważ, jak wiadomo, prosta jest wyznaczona przez dwa punkty, więc z podanego pewnika wynikają następujące **wnioski:**

1) Prosta i punkt, nie leżący na niej, wyznaczają płaszczyznę.

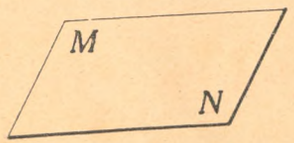
2) Dwie przecinające się proste wyznaczają płaszczyznę.

O punktach mówimy, że leżą na płaszczyźnie, o płaszczyźnie zaś, że jest przez te punkty poprowadzona albo przesunięta.

35. **Pewnik.** Prosta, która ma z płaszczyzną dwa punkty wspólne, leży całkowicie na tej płaszczyźnie t. j. ma wszystkie punkty z nią wspólne.

Dlatego też w praktyce, dla przekonania się, czy dana powierzchnia jest płaska, przykładamy do niej w dowolnych kierunkach linjał i sprawdzamy, czy brzeg linjału przylega do niej całkowicie.

36. Płaszczyzna zawiera nieskończoną ilość punktów i prostych, jest więc powierzchnią nieograniczoną, na rysunku jednak inaczej jej przedstawić nie możemy, jak tylko ograniczając ją linjami (rys. 10) i oznaczamy ją zwykle 2-ma literami, gdziekolwiek w przeciwnych końcach położonemi, np. płaszczyzna MN, lub najczęściej jedną literą, np. płaszczyzna M.



Rys. 10.

37. Niech będzie dana płaszczyzna P i na niej pewna prosta AB. Na tej płaszczyźnie możemy pomyśleć

takie dwa punkty C i D, że dla przejścia od punktu C do D (lub od D do C) musimy przejść przez prostą AB. Widzimy więc że ta prosta dzieli płaszczyznę na dwie części: na jednej z tych części leży punkt C, na drugiej punkt D. A zatem mamy **pewnik:**

Każda prosta, położona na płaszczyźnie, dzieli ją na dwie części.

Każda z tych części zawierać będzie nieskończoną ilość punktów (i prostych) i każda z nich nazywa się półpłaszczyzną.

O dwóch punktach płaszczyzny będziemy mówili, że leżą z jednej strony prostej AB, albo z przeciwnych jej stron, zależnie od tego, czy obydwa leżą na tej samej półpłaszczyźnie, czy też jeden punkt leży na jednej, a drugi na drugiej półpłaszczyźnie.

38. Jeżeli dwie płaszczyzny mają trzy punkty wspólne (niepołożone na jednej prostej), to do siebie przystaną.

Co będzie jednak, jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden albo dwa punkty wspólne?

Przyjmiemy za **pewnik** następującą prawdę:

jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, to muszą mieć przynajmniej jeszcze jeden punkt wspólny, a zatem (na mocy poprzedniego pewnika) mają wspólną linję prostą, która się nazywa linją przecięcia płaszczyzn.

Można więc ten pewnik wyrazić krócej, mówiąc:

Jeżeli dwie płaszczyzny przecinają się, to ich linja przecięcia jest prosta.

39. Jak o punkcie mówiliśmy, że dzieli linję prostą, a o prostej, że dzieli płaszczyznę, tak samo można powiedzieć, że każda płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części, pamiętając, co rozumiemy przez takie dzielenie.

40. O prostej powiedzieliśmy, że leży całkowicie na płaszczyźnie, jeżeli ma z nią dwa punkty wspólne, tej jednak własności inna jakakolwiek linja może nie posiadać. Istnieją krzywe płaskie, których wszystkie punkty leżą na płaszczyźnie, np. okrąg, i przestrzenne, które tej cechy nie posiadają, np. krzywa, którą wyobraża sprężyna druciana.

Wogóle figury geometryczne, których wszystkie elementy leżą na jednej płaszczyźnie, nazywamy płaskiemi, wszystkie zaś inne przestrzennemi.

Część geometrji, która traktuje o figurach płaskich, nosi nazwę geometrji płaskiej czyli planimetrji, ta zaś, która zajmu-

je się figurami 3-wymiarowemi — geometrji przestrzennej czyli stereometrji.

§ 4. Ćwiczenia.

1. Czy zawsze przez ruch prostej otrzymamy płaszczyznę, a przez ruch płaszczyzny—bryłę?

2. Ile różnych prostych można poprowadzić, mając na płaszczyźnie 3, 4, 5, wogóle n punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej?

3. Jaka będzie największa liczba punktów przecięcia 3-ch, 4-ch, 5-u, wogóle n prostych, położonych na jednej płaszczyźnie?

4. Na linji prostej dane są cztery punkty: A, B, C i D. Wymienić odcinki kolejne. Ile wogóle otrzymamy odcinków? Który z nich jest sumą 2-ch innych? Sumą 3-ch? Który jest różnicą 2-ch innych?

5. Na prostej dane są punkty: A, B, C, D i E (w kolei podanej). Jakiemu odcinkowi będą równe:

$AB + BC + CD$? $\quad$ $AE - DE$?
$AC + CD + DE$? $\quad$ $AD - AB$?
$AD + DE$? $\quad$ $AE - (AB + BC)$?

6. Dane są trzy odcinki: a, b, c. Znaleźć $a + 2b$? $2a - b$? $a + b - c$? $a + 2b - 3c$?

7. Mając trzy odcinki: a, b, c, udowodnić, że:

$$(a+b)-c=a+(b-c);\ a-b+c=(a+c)-b.$$

8. Na danej prostej wzięto punkt O i z obu stron odmierzono dwa równe sobie odcinki: OA i OB; na tej samej prostej wzięto jeszcze punkt C, w taki sposób, że punkt B leży między A i C. Udowodnić, że odcinek OC jest równy połowie sumy odcinków AC i BC.

9. Na prostej danej wzięto punkt O i z obu stron odmierzono dwa odcinki: $OA=OB$; oprócz tego na tej prostej wzięto jeszcze punkt C, położony między A i B. Udowodnić, że odcinek OC jest równy połowie różnicy odcinków AC i BC.

10. Wyprostować linję łamaną $ABCD$, czyli znaleźć odcinek, równy sumie odcinków, tworzących łamaną.

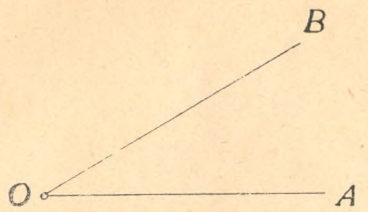
§ 5. Kąt.

41. **Określenia.** Jeżeli na płaszczyźnie wyprowadzimy z danego punktu dwie półproste, to utworzymy figurę, która nazywa się kątem płaskim, albo krócej—kątem.

Półproste, tworzące kąt: OA i OB (rys. 11), nazywają się jego ramionami, a ich wspólny punkt O wierzchołkiem kąta.

Płaszczyzna, wyznaczona przez ramiona kąta, nazywa się płaszczyzną tego kąta.

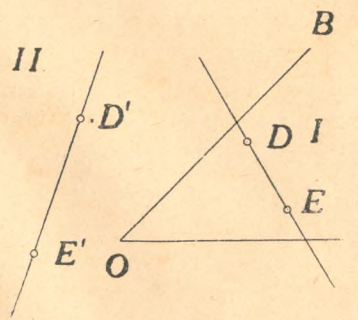
Kąt oznacza się zwykle na rysunku trzema literami i czyta się w ten sposób, że nazwa wierzchołka przypada pośrodku, np. kąt AOB. Niekiedy wystarcza oznaczyć kąt jedną literą (najczęściej greckiego alfabetu), np. kąt α, lub numerem, np. kąt 1, 2, jeżeli przez takie oznaczenie nie wprowadza się nieporozumienia, o który kąt chodzi.



Rys. 11.

42. Kąt dzieli płaszczyznę na dwie części, czyli na dwa obszary kątowe (I i II na rys. 12). Jeden z tych obszarów nazywamy wewnętrznym i o punktach tego obszaru mówimy, że leżą wewnątrz kąta, drugi zaś nazywamy zewnętrznym, jego punkty leżą zewnątrz kąta.

Jeżeli przez dwa punkty dowolne, np. D i E, obszaru I poprowadzimy prostą, to ona przetnie ramiona kąta (albo przynajmniej jedno z nich), czego o każdej parze punktów obszaru drugiego powiedzieć się nie da (np. D' i E'). Ten właśnie obszar I zwykle uważa się za wewnętrzny, chyba że zgóry zrobiono zastrzeżenie przeciwne.



Rys. 12.

Często używamy w piśmie znaku $\sphericalangle$ zamiast słowa „kąt".

43. Kąty mogą być równe lub nierówne.

O istnieniu kątów równych przekonać się możemy z łatwego doświadczenia, jeżeli wytniemy z kartonu dwa kąty: ABC i $A'B'C'$ i przeniesiemy jeden na drugi w taki sposób, żeby miały wierzchołek wspólny i jedno ramię wspólne.

Jeżeli się okaże, że pozostałe ich ramiona do siebie przystały, to powiadamy, że dane kąty są sobie równe, co zaznaczamy, pisząc

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

Jeżeli zaś ramię $A'B'$ upadnie wewnątrz lub zewnątrz 1-go kąta, to powiemy, że kąty są nierówne i piszemy w 1-ym przypadku

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle A'B'C',$$

w 2-im zaś

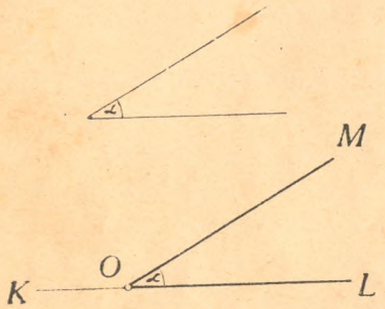
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle A'B'C'.$$

Uwaga. Jeżeli ramię OB kąta AOB (rys. 11) będziemy uważali za ruchome i za początkowe jego położenie weźmiemy OA, za końcowe zaś OB, to możemy powiedzieć, że kąt powstaje przez obrót ramienia ruchomego dokoła danego punktu czyli wierzchołka.

Mówimy wtedy, ze półprosta zakreśliła kąt.

Kąt ten mógł powstać także przez obrót drugiego ramienia, które wychodzi z położenia początkowego OB i zajmuje położenie końcowe OA. Można więc rozróżniać dwa zwroty kąta, jeżeli jednak o zwrocie nie myślimy, powiadamy, że otrzymujemy kąt AOB albo BOA—bez różnicy. Mówi się niekiedy, że prosta OB jest nachylona do OA pod kątem AOB.

44. Niech będzie dany kąt α (rys. 13), prosta KL i punkt O na niej. Z tego punktu można wyprowadzić nieograniczoną ilość półprostych (z każdej strony prostej KL), ale tylko jedna z nich OM będzie tworzyła z półprostą OL kąt MOL równy kątowi α, czyli będzie nachylona do OL pod kątem α.



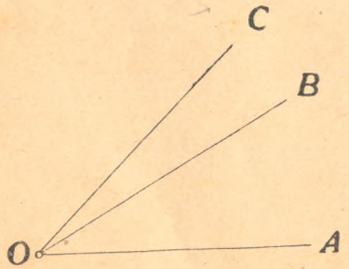
Rys. 13.

Przyjmujemy tedy za **pewnik:**

Z każdej strony danej prostej z punktu na niej położonego, zawsze można wyprowadzić taką półprostą, ale tylko jedną, która z daną półprostą tworzy kąt, równy danemu.

Na zasadzie tego pewnika dokonywa się „przenoszenie" kąta na daną prostą, czyli budowanie kąta równego danemu.

O sposobach tej konstrukcji będziemy mówili później, tymczasem notujemy tylko jej możliwość.



Rys. 14.

45. Jeżeli z wierzchołka kąta AOB (rys. 14) na danej płaszczyźnie wyprowadzimy zewnętrzną półprostą OC (rys. 14), to otrzymamy kąty AOB i BOC, które oprócz wspólnego wierzchołka O mają jedno ramię wspólne. Takie kąty nazywamy kolejnemi.

Biblioteka Politechniki Gdańskiej

Trzeci kąt, który otrzymaliśmy, mianowicie $\sphericalangle AOC$, nazywamy wtedy sumą kątów AOB i BOC:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC.$$

Każdy z tych kątów nazywamy wtedy mniejszym od kąta AOC:

$$\sphericalangle AOB < \sphericalangle AOC \text{ i } \sphericalangle BOC < \sphericalangle AOC.$$

Przeciwnie kąt AOC jest większy od AOB, lub BOC:

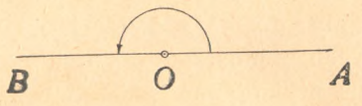
$$\sphericalangle AOC > \sphericalangle AOB \text{ i } \sphericalangle AOC > \sphericalangle BOC.$$

Każdy z kątów AOB i BOC nazywamy różnicą pomiędzy kątem AOC i pozostałym kątem:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC,$$
$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOB.$$

Dodawanie kątów można rozszerzyć na trzy lub większą liczbę składników. Aby znaleźć sumę 2-ch, lub więcej kątów niekolejnych, trzeba znaleźć sumę kątów kolejnych, odpowiednio równych danym kątom.

46. Dodając do siebie kąty, możemy spotkać się z takim przypadkiem, że ramię jednego z kątów dodawanych stanie się przedłużeniem ramienia 2-go kąta. Wtedy, jako sumę, otrzymamy kąt, który nazywa się kątem półpełnym (rys. 15). A więc mamy **określenie:**



Rys. 15.

Kątem półpełnym nazywa się taki kąt, którego jedno ramię jest przedłużeniem drugiego, np. $\sphericalangle AOB$ (rys. 15).

Kąt półpełny opisuje ruchome ramię kąta, zajmując położenie, które jest przedłużeniem ramienia stałego. Jeżeli ramię ruchome, obracając się koło O dalej w tym samym kierunku, dojdzie do swego położenia początkowego, czyli wykona całkowity obrót, mówimy, że ono opisało kąt pełny.

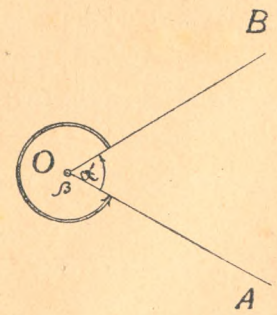
Przyjmujemy za **pewnik,** że:

1) kąty półpełne są sobie równe,

2) kąty pełne są sobie równe.

Kąt większy od półpełnego nazywa się wklęsłym, w odróżnieniu od kąta wypukłego, t. j. mniejszego od półpełnego.

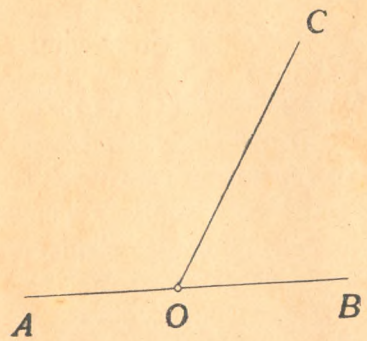
Jeżeli więc z punktu O na płaszczyźnie (rys. 16) wyprowadzimy dwie półproste: OA i OB, to otrzymamy dwa kąty, z których jeden (α) jest wypukły, drugi zaś (β) wklęsły. Nadal, o ile wyraźnie tego nie powiemy, przez kąt AOB rozumieć będziemy kąt wypukły.



Rys. 16.

47. Z tego, co było powiedziane, widzimy, że dwa kąty możemy łączyć znakami równości lub nierówności, możemy je dodawać i odejmować, a jakkolwiek tymczasem jeszcze nie znamy sposobów „przenoszenia" kąta, więc i znajdowania sumy lub różnicy dwóch dowolnych kątów niekolejnych, to jednak widzieliśmy, że taka możliwość istnieje. Jeżeli dalej rozszerzymy dodawanie na kilka składników, dochodzimy do pojęcia kąta, który będzie równy danemu, powtórzonemu pewną liczbę razy (mnożenie kąta przez liczbę całkowitą), a stąd już, jako działanie odwrotne, wyniknie d z i e l e n i e kąta na części.

Możemy więc na kątach dokonywać działań tak, jak na odcinkach, a zatem kąty, podobnie jak odcinki, zaliczamy do w i e l k o ś c i geometrycznych i możemy do nich stosować pewniki ogólne, podane w ustępie 32 (str. 11).



Rys. 17.

48. Jeżeli z pewnego punktu O prostej AB (rys. 17) wyprowadzimy półprostą OC, to utworzą się dwa kąty: AOC i COB, które nazywamy p r z y l e g ł e m i.

Stąd **określenie:**

D w a k ą t y, k t ó r e m a j ą w s p ó l n y w i e r z c h o ł e k, j e d n o r a m i ę w s p ó l n e i k t ó r y c h p o z o s t a ł e r a m i o n a t w o r z ą j e d n ą p r o s t ą, n a z y w a j ą s i ę p r z y l e g ł e m i.

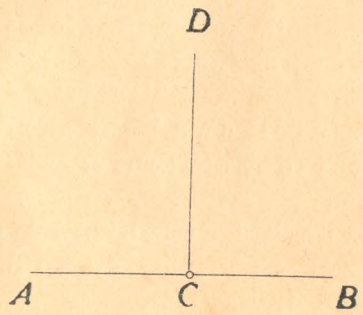
Oczywiście, suma kątów przyległych jest kątem półpełnym.

O kątach przyległych mówimy, że się nawzajem s p e ł n i a j ą, a każdy jest s p e ł n i e n i e m drugiego.

Widzimy więc, że spełnienie danego kąta jest równe różnicy między kątem półpełnym i danym, a stąd już wynika **wniosek:**

J e ż e l i d w a k ą t y s ą s o b i e r ó w n e, t o i s p e ł n i e n i a i c h s ą r ó w n e.

49. Jeżeli wspólne ramię CD (rys. 18) kątów przyległych ma takie położenie względem prostej AB, że oba kąty są sobie równe, to każdy z nich nazywa się k ą t e m p r o s t y m, np. $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle BCD$.



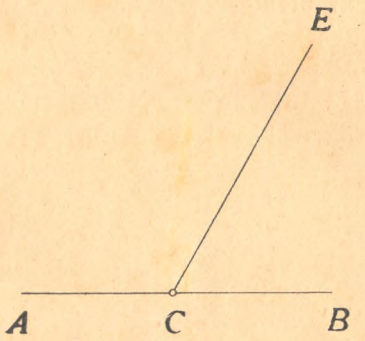
Rys. 18.

O istnieniu takich kątów przekonamy się nieco później.

Znakiem kąta prostego bywa często litera d (*droit* = prosty), więc aby zaznaczyć, że dany kąt jest prosty, piszemy $\sphericalangle ACD = d$.

Proste, które tworzą z sobą kąty przyległe równe, to znaczy przecinają się z sobą pod kątem prostym, nazywają się p r o s t o p a d ł e m i względem siebie, np. AB i CD (rys. 18). Dla skrócenia piszemy często $AB \perp CD$, albo $CD \perp AB$, czytając AB jest prostopadła do CD, albo CD—prostopadła do AB.

Punkt C nazywa się s p o d k i e m prostopadłej.



Rys. 19.

Prosta, która przecina daną prostą pod kątem nieprostym, nazywa się p o c h y ł ą względem niej, np. CE jest p o c h y ł ą do AB (rys. 19).

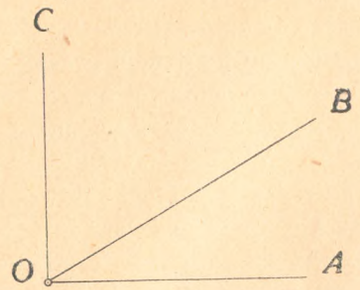
Stąd, że suma kątów przyległych jest równa kątowi półpełnemu, wynika, że kąt prosty, jako jeden z dwóch równych sobie kątów przyległych, można uważać za połowę półpełnego, a zatem:

w s z y s t k i e k ą t y p r o s t e s ą s o b i e r ó w n e.

50. Z kątem prostym, jako wielkością stałą, można porównywać wszystkie inne kąty. Kąt mniejszy od prostego nazywa się o s t r y m, większy od prostego—r o z w a r t y m.

Jeżeli dwa kąty ostre tworzą w sumie kąt prosty, to mówimy, że te kąty d o p e ł n i a j ą s i ę do kąta prostego i każdy z nich na-

zywa się dopełnieniem drugiego, czyli jest różnicą między kątem prostym a drugim kątem, np. kąty: AOB i BOC (rys. 20).



Rys. 20.

Stąd wynikają następujące **wnioski:**

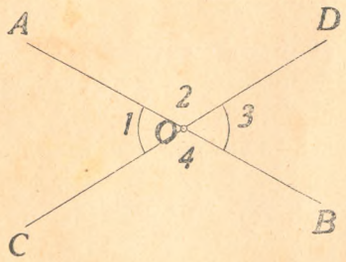
1. Kąt półpełny jest równy sumie dwóch kątów prostych.

2. Suma kątów przyległych jest równa sumie dwóch kątów prostych.

3. Jeżeli dwa kąty są równe, to i dopełnienia ich są równe.

4. Jeżeli jeden z kątów przyległych jest ostry, to drugi jest rozwarty.

51. Jeżeli mamy dwie proste AB i CD (rys. 21), przecinające się w punkcie O, to otrzymamy 4 kąty kolejne, które dla skrócenia oznaczmy numerami: 1, 2, 3 i 4. Niektóre z nich są przyległe, np. kąty 1 i 2, inne zaś nieprzyległe, np. 1 i 3, albo 2 i 4.



Rys. 21.

Określenie. Dwa kąty, utworzone przez dwie przecinające się proste, nazywają się kątami wierzchołkiem przeciwległemi, albo krócej: wierzchołkowemi, jeżeli ramiona jednego z nich są przedłużeniem ramion drugiego.

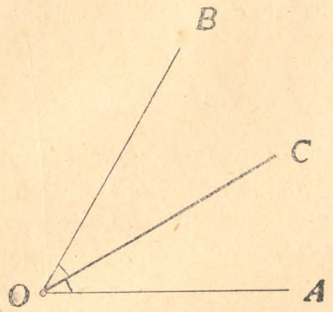
Takie kąty mają pewną własność, którą wyraża następujące

Twierdzenie. Kąty wierzchołkowe są sobie równe.

Mamy dwie proste AB i CD (rys. 21), przecinające się w punkcie O, wtedy utworzą się kąty wierzchołkowe: 1 i 3 (albo 2 i 4). Trzeba dowieść, że $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.

Dowód. Ponieważ kąty 1 i 2 są przyległe, więc kąt 1 jest spełnieniem kąta 2, dla takiej samej przyczyny kąt 3 jest również spełnieniem kąta 2, a więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ (patrz 48), co było do dowiedzenia.

Uwaga. Dopiero co przytoczone twierdzenie wypowiedzieliśmy w postaci skróconej, w której zacierają się dwie części, z jakich powinno się składać każde twierdzenie (patrz 14). Można je było wyrazić w następującej formie: „Jeżeli dwa kąty mają wspólny wierzchołek i ramiona jednego z nich są przedłużeniami ramion drugiego, to te kąty są sobie równe". Wtedy założeniem będzie zdanie: „Jeżeli . . . . .", konkluzją zaś: „to . . . . .".



Rys. 22.

52. Z wierzchołka kąta AOB (rys. 22) wyprowadźmy półprostą OC, położoną wewnątrz tego kąta, wtedy otrzymamy dwa kąty: AOC i COB, które w sumie tworzą kąt dany AOB.

Jeżeli półprostą OC tak poprowadzimy, że:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB,$$

to kąt AOB będzie podzielony na połowy i OC nazwiemy dwusieczną kąta danego.

Jak taką prostą wykreślić, zobaczymy wkrótce.

§ 6. Ćwiczenia.

1. Z punktu O wyprowadzono trzy półproste: OA, OB i OC. Ile utworzyło się wogóle kątów? Który z nich jest sumą 2-ch innych, a który różnicą?

2. Z punktu O wyprowadzono 4 półproste: OA, OB, OC i OD. Który kąt jest sumą dwóch innych? Który jest sumą 3-ch? Który jest różnicą 2-ch innych?

3. Z punktu O wyprowadzono 4 półproste: OA, OB, OC i OD. Jakiemu kątowi będą równe:

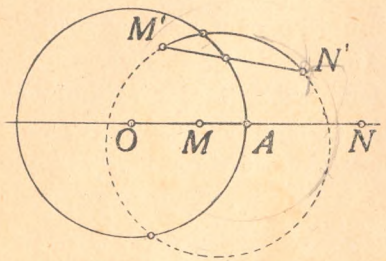
$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$? $\quad$ $\sphericalangle AOD - \sphericalangle AOB$?
$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COD$? $\quad$ $\sphericalangle AOD - \sphericalangle COD$?
$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD$? $\quad$ $\sphericalangle AOD - \sphericalangle (AOB + BOC)$?

4. Trzy proste: AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie O. Przeczytać parami kąty przyległe, kąty wierzchołkowe. Które kąty tworzą w sumie kąt półpełny?

5. Z punktu O wyprowadzono cztery półproste: OA, OB, OC i OD. Okazało się, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC$. Czy to wystarcza, aby twierdzić, że te kąty są wierzchołkowe? Jak sformułować twierdzenie odwrotne względem twierdzenia o kątach wierzchołkowych (ust. 51)?

6. Dowieść, że dwusieczne kątów przyległych są do siebie prostopadłe.

57. Jeżeli przez środek koła poprowadzimy jakąkolwiek prostą, to łatwo wyrozumować, że ona przetnie okrąg z każdej strony środka tylko w jednym punkcie (patrz pewnik ust. 26), a więc jeżeli na tej prostej obierzemy dwa punkty: M i N (rys. 27), położone jeden wewnątrz koła, a drugi zewnątrz niego, to odcinek MN (jako część poprowadzonej prostej) przetnie się z okręgiem tylko w punkcie A. Zachodzi teraz pytanie: czy jakakolwiek inna prosta, nieprzechodząca przez środek koła, będzie miała również taką własność?



Rys. 27.

Twierdzimy, że tak będzie, przyjmując następujący **pewnik**:

Odcinek, łączący dwa punkty płaszczyzny, z których jeden leży wewnątrz koła, a drugi zewnątrz niego, przecina okrąg, ale tylko w jednym punkcie (np. M' N').

Ten pewnik rozszerzamy nawet na taki przypadek, kiedy rzeczone punkty (M' i N') połączymy łukiem jakiegokolwiek koła, zamiast odcinkiem.

Wniosek. Punkty M' i N' (rys. 27) moglibyśmy połączyć łukiem położonym z przeciwnej strony odcinka $M'N'$; przetnie on dany okrąg znowu w jednym punkcie, więc widzimy, że okrąg, który przechodzi przez dwa punkty M' i N', z których jeden leży wewnątrz danego koła, a drugi zewnątrz niego, przecina się z okręgiem danym w dwóch punktach, ale nie więcej.

58. **Określenia.** Odcinek, który łączy dwa punkty okręgu, czyli końce łuku, nazywa się cięciwą.

Cięciwa, która przechodzi przez środek koła, nazywa się średnicą.

Oczywiście, w kole wszystkie średnice są sobie równe, jako też wszystkie promienie są sobie równe.

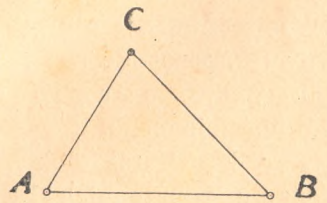
Dwa koła nazywamy równemi, jeżeli mają promienie równe.

Łuk, którego końce są połączone średnicą, nazywa się półokręgiem, a część płaszczyzny, ograniczona średnicą i półokręgiem, nazywa się półkolem.

Z tego, co było powiedziane, wynika, że okrąg jest wyznaczony, jeżeli znamy położenie jego środka i promień.

§ 8. Wiadomości wstępne o trójkącie i wielokącie.

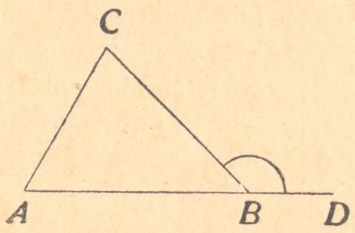
59. **Określenia.** Jeżeli trzy punkty: A, B i C, niepołożone na jednej prostej (rys. 28), połączymy odcinkami AB, BC i AC, to otrzymamy figurę, która nazywa się trójkątem. Odcinki, tworzące trójkąt, nazywają się jego bokami, a punkty przecięcia—wierzchołkami. Kąty, utworzone przez każde dwa boki trójkąta, nazywają się kątami trójkąta. Boki i kąty trójkąta nazywają się jego elementami. Suma boków nazywa się obwodem trójkąta, a linja łamana $ABCA$ — konturem trójkąta.



Rys. 28.

Znakiem trójkąta bywa często $\triangle$.

Kontur trójkąta dzieli płaszczyznę na dwie części, czyli dwa obszary, z których jeden jest ograniczony czyli wewnętrzny, stanowi trójkąt i zawiera wszystkie punkty płaszczyzny, położone wewnątrz niego oraz punkty na konturze, drugi zaś jest nieograniczony czyli zewnętrzny.



Rys. 29.

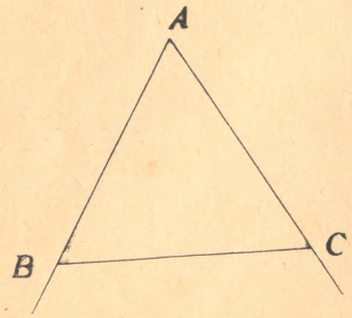
Jeżeli którykolwiek z boków trójkąta ABC (rys. 29), np. bok AB przedłużymy, to kąt, utworzony przez bok BC i przedłużenie boku AB, nazywa się kątem zewnętrznym trójkąta, np. CBD. Kąty, utworzone przez boki trójkąta, nazywają się wtedy wewnętrznemi, albo poprostu kątami trójkąta.

Bok trójkąta oznacza się często jedną literą (małego alfabetu) i zwykle literą a oznaczamy bok BC położony naprzeciw kąta A, literą b — bok AC, literą c—bok AB.

Kąty wewnętrzne oznaczamy albo jedną literą, np. kąty A, B, C, jeżeli przez to niema nieporozumienia, o który kąt chodzi, albo trzema, np. $\sphericalangle ABC$, albo wreszcie jedną literą alfabetu greckiego, np. kąt A oznacza się często literą α, kąt B—β, kąt C—γ.

60. Jeden z boków △-ta nazywamy zwykle **podstawą**, a wierzchołek przeciwległy — **wierzchołkiem** trójkąta, o ile o dwóch pozostałych wierzchołkach nie mówimy.

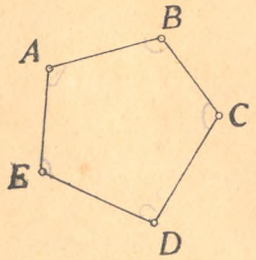
Jeżeli na ramionach dowolnego kąta A (rys. 30), począwszy od wierzchołka, odmierzymy dwa równe sobie odcinki AB i AC, to otrzymamy △ ABC, który ma dwa boki równe: $AB = AC$. Taki trójkąt nazywa się **równoramiennym**; za jego podstawę uważa się zwykle bok nierówny BC, pozostałe zaś boki $(AB = AC)$ nazywają się **ramionami** △-ta równoramiennego.



Rys. 30.

Gdybyśmy kąt A tak dobrali, że po dokonaniu poprzednich konstrukcyj okazałoby się, że i trzeci bok BC jest równy AB i AC, to otrzymalibyśmy trójkąt o wszystkich trzech bokach równych. Taki trójkąt nazywa się **równobocznym**, a jak go zbudować, wkrótce zobaczymy.

61. Jeżeli dane na płaszczyźnie punkty: A, B, C i t. d. połączymy odcinkami AB, BC, CD i t. d., to otrzymamy część płaszczyzny, ograniczoną łamaną linją $ABCDEA$, do której należeć będą wszystkie punkty, wewnątrz tej łamanej oraz na niej położone.



Rys. 31.

Taka figura nazywa się **wielokątem**, a w szczególności czworokątem, pięciokątem i t. d., stosownie do liczby danych punktów (rys. 31).

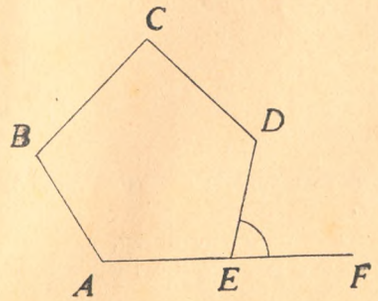
Odcinki, tworzące wielokąt, nazywają się jego **bokami**, ich punkty przecięcia — **wierzchołkami** wielokąta.

Kąty, utworzone przez każde dwa kolejne boki, nazywają się **kątami** wielokąta.

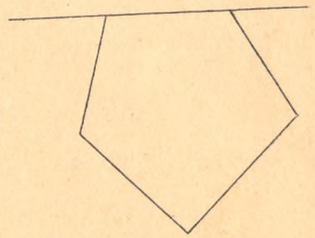
Suma wszystkich boków nazywa się **obwodem** wielokąta, linja łamana $ABCDEA$, ograniczająca wielokąt — **konturem** wielokąta.

Kontur wielokąta dzieli płaszczyznę na dwie części, lub dwa obszary, z których jeden jest ograniczony, czyli **wewnętrzny** i stanowi wielokąt, drugi zaś jest nieograniczony, czyli **zewnętrzny**.

Jeżeli którykolwiek z boków wielokąta, np. AE (rys. 32), przedłużymy, to kąt, utworzony przez bok ED i przedłużenie boku AE, czyli $\sphericalangle DEF$ nazywa się **kątem zewnętrznym** wielokąta. Kąty zaś, utworzone przez każde dwa boki, nazywamy wtedy kątami **wewnętrznemi**, albo poprostu kątami wielokąta.

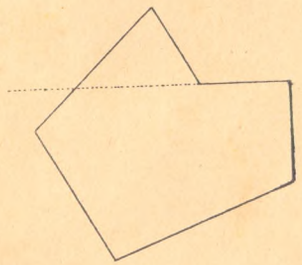


Rys. 32.

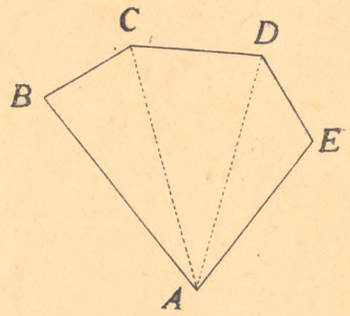


Rys. 33.

62. Wielokąt nazywamy **wypukłym** (rys. 33), jeżeli przedłużenia żadnego z jego boków nie przecinają jego konturu, w przeciwnym razie wielokąt nazywa się **wklęsłym** (rys. 34).



Rys. 34.



Rys. 35.

Nadal mówić będziemy zawsze o wielokątach wypukłych, chyba że wyraźnie zaznaczymy jego wklęsłość.

Odcinek, który łączy dwa wierzchołki wielokąta, niepołożone na tym samym boku, nazywa się **przekątną**, np. AC, AD (rys. 35).

Każdy wielokąt wypukły można podzielić na trójkąty przekątnemi, wyprowadzonemi z któregokolwiek wierzchołka. Jeżeli zauważymy, że do każdego z tych trójkątów potrzeba będzie po jednym boku wielokąta prócz skrajnych, na które potrzeba po dwa boki, to łatwo wyrozumować, że wielokąt można podzielić przekątnemi na tyle trójkątów, ile ma boków mniej dwa.

Co do liczby przekątnych, które da się wyprowadzić z jednego wierzchołka wielokąta, to ich będzie tyle, ile wielokąt ma boków mniej trzy. Więc np. z jednego wierzchołka w 4-kącie można wyprowadzić jedną przekątną, w 5-kącie dwie i t. d.

§ 9. Ćwiczenia.

1. Wykreślić kilka okręgów, mających ten sam środek; ten sam promień, ale środek inny.

2. Promieniem równym odcinkowi danemu a wykreślić okrąg, przechodzący przez dany punkt A. Ile takich okręgów można wykreślić i gdzie będą leżały ich środki?

3. Wszystkie boki danego trójkąta przedłużono w obie strony. Ile powstało kątów przy każdym wierzchołku trójkąta? Wymienić kąty wewnętrzne i zewnętrzne trójkąta. Które z otrzymanych kątów będą sobie równe, a które będą się spełniały?

4. Co można powiedzieć o odcinku, który łączy punkt wewnętrzny △-ta z punktem zewnętrznym? O odcinku, który łączy dwa punkty zewnętrzne trójkąta?

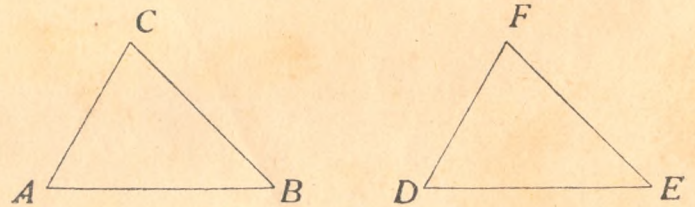
5. Ile przekątnych można wyprowadzić z jednego wierzchołka 10-kąta? 15-kąta? Ile różnych przekątnych da się wyprowadzić ze wszystkich wierzchołków danego wielokąta?

ROZDZIAŁ II.

Równość i symetrja figur płaskich.

§ 10. Równość trójkątów.

63. Dwa trójkąty nazywamy równemi, jeżeli mają wszystkie elementy odpowiednio równe, a więc boki—bokom, kąty kątom. Tak np. jeżeli mamy dwa takie trójkąty ABC i DEF (rys. 36), w których:



Rys. 36.

$$AB = DE;\ BC = EF;\ AC = DF$$

i

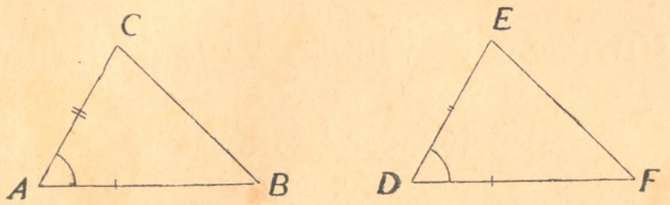
$$\sphericalangle A = \sphericalangle D;\ \sphericalangle B = \sphericalangle E;\ \sphericalangle C = \sphericalangle F,$$

to powiadamy, że te trójkąty są sobie równe: $\triangle ABC = \triangle DEF$. Przekonamy się jednak wkrótce, że dla równości trójkątów wystarczać będą trzy równości, wtedy okaże się, że i pozostałe elementy tych trójkątów będą sobie odpowiednio równe, mianowicie te boki będą równe, które leżą naprzeciw kątów równych i odwrotnie.

Dobierając w odpowiedni sposób po trzy elementy każdego z danych trójkątów, otrzymamy różne przypadki czyli cechy równości trójkątów.

64. Niech będą dane dwa trójkąty ABC i DEF, które mają (rys. 37):

$$AB = DF;\ AC = DE;\ \sphericalangle A = \sphericalangle D.$$



Rys. 37.

Gdybyśmy takie trójkąty wycięli z kartonu i nałożyli jeden na drugi w taki sposób, aby bok DF upadł na AB i wierzchołek D na A, to z łatwością spostrzeżemy, że wierzchołek F upadnie na B, gdyż boki AB i DF są sobie równe; bok DE upadnie na AC, dlatego że $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, wreszcie wierzchołek E przystanie do C, bo $DE = AC$. A zatem wszystkie trzy wierzchołki do siebie przystaną, również wszystkie trzy boki, a więc trójkąty do siebie przystaną, czyli są sobie równe.

Z tego doświadczenia wysnuwamy **pewnik** następujący:

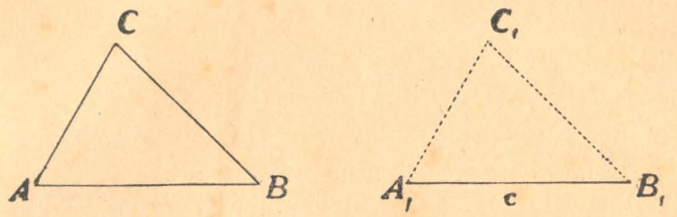
Dwa trójkąty są sobie równe, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe i po kącie, między niemi zawartym, równym.

Jest to 1-sza cecha równości czyli przystawania trójkątów.

65. **Wnioski.** Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 38) i odcinek $A_1B_1 = c$ równy któremukolwiek bokowi tego trójkąta, np. AB.

Na zasadzie wiadomego pewnika (ust. 44) możemy powiedzieć, że z każdej strony odcinka c istnieje jedna taka półprosta, która z tym odcinkiem utworzy kąt A_1 równy kątowi A. Jeżeli następnie

na ramieniu tego kąta odmierzymy odcinek $A_1C_1 = AC$ i połączymy jego koniec C_1 z punktem B_1, to otrzymamy $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.



Rys. 38.

A zatem otrzymujemy:

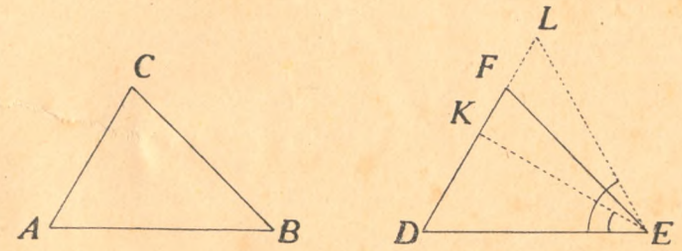
Wniosek 1. Z każdej strony danego odcinka, równego jednemu z boków danego trójkąta, istnieje trójkąt równy danemu, ale tylko jeden.

Jak zbudować taki trójkąt, zobaczymy niebawem.

Wniosek 2. Dwa boki i kąt między niemi zawarty w zupełności wyznaczają trójkąt.

66. **Twierdzenie** (2-ga cecha równości trójkątów).

Dwa trójkąty są sobie równe, jeżeli mają po jednym boku równym i po dwa kąty, do niego przyległe, odpowiednio równe.



Rys. 39.

Niech będą dane dwa trójkąty: ABC i DEF (rys. 39), które mają:

$$AB = DE$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle D$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle E.$$

Mamy dowieść, że $\triangle ABC = \triangle DEF$, czyli że te trójkąty mają wszystkie pozostałe elementy odpowiednio równe.

Dowód. Wystarczy dowieść, że bok $AC = DF$.

Gdyby bok AC nie był równy DF, musiałby być od niego albo mniejszy, albo większy. Przypuśćmy więc, że bok AC jest mniejszy od DF, w takim razie, odmierzając AC na DF od punktu D, otrzymalibyśmy koniec C boku AC wewnątrz odcinka DF, np. w pewnym punkcie K, czyli otrzymalibyśmy $DK = AC$ i dwa trójkąty ABC i DEK byłyby sobie równe, co pociągałoby za sobą równość kątów B i KED, a to jest niedorzecznością, dlatego że $\sphericalangle KED$, jako nierówny $\sphericalangle DEF$, nie mógłby być równy kątowi B, jak tego wymaga założenie.

W taki sam sposób łatwo się przekonamy, że bok AC nie może być większy od DF.

Jeżeli zatem bok AC nie może być ani mniejszy, ani większy od DF, to musi być mu równy, a w takim razie trójkąty ABC i DEF mają po dwa boki odpowiednio równe i po kącie między niemi zawartym równym, czyli są sobie równe (1-sza cecha równości), co było do dowiedzenia.

67. **Wniosek.** Powołując się na wniosek 1 poprzedniego ust., możemy powiedzieć:

Jeden bok i dwa kąty do niego przyległe w zupełności wyznaczają trójkąt.

Rozumiemy to w ten sposób, że mając $\triangle ABC$, zawsze możemy z odcinka równego AB i dwóch kątów, odpowiednio równych $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$, zbudować nowy trójkąt, ale tylko jeden, równy danemu.

68. *Uwaga* Sposób dowodzenia, którego użyliśmy w ostatniem twierdzeniu, znany jest pod nazwą sprowadzenia do niedorzeczności („reductio ad absurdum") i ma dość częste zastosowanie. Polega na tem, jak widzieliśmy, że nie mogąc dowieść pewnej prawdy wprost, np. że $A = B$, dowodzimy, że A nie może być ani większe, ani mniejsze od B. Robimy więc naprzód przypuszczenie, że A jest większe od B i dochodzimy do wniosku, że ono musi upaść dlatego, że prowadzi do niedorzeczności, czyli do sprzeczności

albo z przyjętem założeniem, albo z poprzedniemi, już uznanemi prawdami. Jeżeli i drugie przypuszczenie ($A < B$) doprowadzi również do niedorzeczności, to musimy dojść do wniosku, że $A = B$.

Zastrzec tu należy, że przypuszczenia, które robimy o danych wielkościach A i B, powinny wyczerpywać wszelkie możliwe zależności między niemi, oraz powinny się one nawzajem wykluczać: albo będzie $A > B$, albo $A < B$, albo wreszcie $A = B$.

69. **Twierdzenie.** Jeżeli w trójkącie dwa boki są sobie równe, to i kąty, naprzeciw nich położone, są równe.

Trójkąt, który ma dwa boki równe, nazywa się, jak wiadomo, trójkątem równoramiennym; za jego podstawę obieramy bok nierówny, więc twierdzenie można wypowiedzieć w następujący sposób:

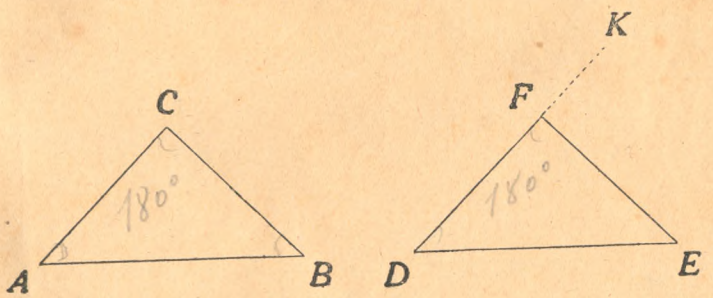
w trójkącie równoramiennym kąty, położone przy podstawie, są sobie równe.

Niech będzie dany trójkąt równoramienny ABC (rys. 40), w którym

$$AC = CB;$$

należy dowieść, że

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B.$$



Rys. 40.

Dowód. Weźmy odcinek $DE = AB$; jak wiemy, istnieje taka półprosta DK, która z odcinkiem DE tworzyć będzie kąt D równy kątowi A. Jeżeli na tej półprostej odetniemy $DF = AC$ i połączymy punkty F i E, to otrzymamy $\triangle DEF = \triangle ABC$ (1-a cecha równości trójkątów). A zatem będziemy mieli:

$$CB = FE, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle F, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle E.$$

Ale z założenia mieliśmy $AC = CB$, więc otrzymamy teraz

$$AC = CB = DF = FE,$$

czyli trójkąty ABC i DEF są jeszcze dlatego równe, że mają:

$$AC = FE,\ CB = DF \text{ i } \sphericalangle C = \sphericalangle F,$$

a stąd wynika, że

$$\sphericalangle B = \sphericalangle D,$$

a że z konstrukcji mieliśmy

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D,$$

więc będzie

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B \qquad \text{c. b. d. d.}$$

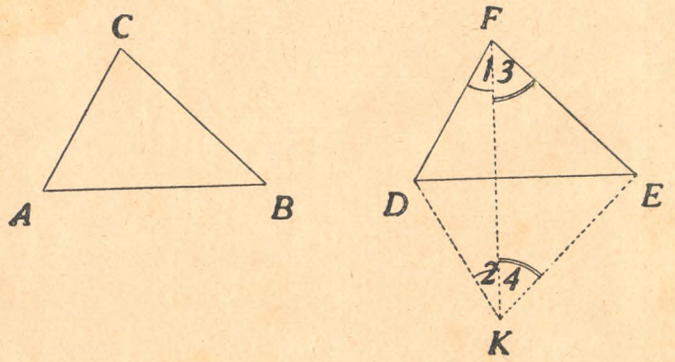
Uwaga. Przytoczone twierdzenie, znane w dalekiej starożytności, przypisują *Talesowi z Miletu* (627 — 547 przed Chr.). Jest to pierwszy znany geometra grecki, jemu przypisywane jest również twierdzenie o kątach wierzchołkowych. Podanie głosi, że Tales wprowadził w podziw króla egipskiego, obliczywszy wysokość jednej z piramid bez użycia jakichkolwiek instrumentów.

70. **Twierdzenie** (3-a cecha równości trójkąty są sobie równe, jeżeli mają po trzy boki odpowiednio równe.

Niech będą dane dwa trójkąty: ABC i DEF (rys. 41), które mają:

$$AB = DE,$$
$$AC = DF$$
$$\text{i } CB = FE;$$

należy dowieść, że $\triangle ABC = \triangle DEF$.



Rys. 41.

Dowód. Mając z założenia $DE = AB$, możemy powiedzieć, że z każdej strony odcinka DE istnieje trójkąt równy trójkątowi ABC. Takim trójkątem, zbudowanym po przeciwnej stronie odcinka DE, niż DEF, niech będzie DEK, w którym

$$DK = AC \text{ i } EK = CB,$$

a że z założenia $DF = AC$ i $FE = CB$, więc

$$DF = DK \text{ i } FE = EK.$$

W takim razie, łącząc punkty F i K, otrzymamy trójkąt równoramienny KDF, w którym będzie

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$$

oraz trójkąt równoramienny FEK, w którym

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4,$$

a zatem

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4,$$

czyli

$$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DKE.$$

Stąd wynika, że $\triangle DFE = \triangle DKE$ (1-a cecha równości trójkątów), a że $\triangle DKE = \triangle ABC$, więc

$$\triangle ABC = \triangle DEF \qquad \text{c. b. d. d.}$$

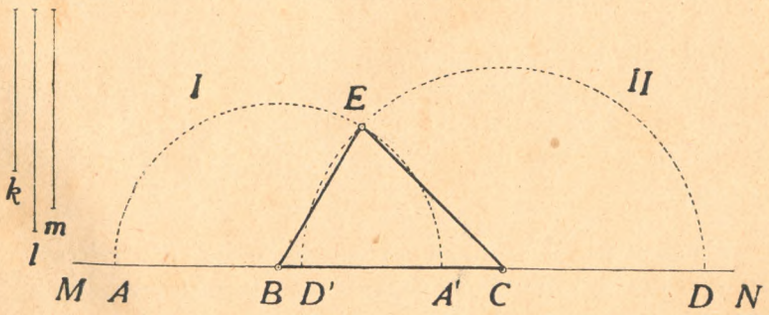
Wniosek. Trzy boki wyznaczają trójkąt.

Rozumiemy to znowu w taki sposób, że mając trójkąt ABC, zawsze możemy z trzech odcinków odpowiednio równych bokom AB, BC i AC zbudować nowy trójkąt równy danemu.

§ 11. Konstrukcje podstawowe.

71. Poznaliśmy trzy zasadnicze cechy równości trójkątów, które pozwolą nam dokonywać niektórych konstrukcyj geometrycznych, niezbędnych do dalszej nauki.

Zadanie 1. Zbudować trójkąt, którego boki są odpowiednio równe trzem odcinkom danym.



Rys. 42.

Na prostej MN (rys. 42), poczynając od dowolnego punktu A, odmierzamy trzy kolejne odcinki: $AB = k$, $BC = l$ i $CD = m$.

Uważając punkt B za środek koła, a odcinek $AB = k$ za jego promień, możemy zawsze wykreślić okrąg, który dla skrócenia nazwiemy I; podobnie środek C i promień $CD = m$ wyznaczą drugi okrąg (II) (wystarczy wykreślić półkręgi, położone z jednej strony prostej MN).

Czy te dwa okręgi z sobą się przetną?

Powołując się tu na pewnik (ust. 57), zażądajmy, żeby łuk okręgu II łączył dwa punkty na płaszczyźnie, z których jeden byłby położony wewnątrz okręgu I, a drugi zewnątrz niego.

Nazwijmy punkty przecięcia okręgu II z daną prostą D i D' i rozstrzygnijmy pytanie: kiedy te punkty będą leżały w różnych częściach płaszczyzny, na którą ją podzielił okrąg I?

Punkt D' będzie leżał wewnątrz okręgu I, jeżeli jego odległość od środka koła B będzie mniejsza od promienia koła I, czyli jeżeli $BD' < AB$, ale $BD' = BC - CD' = BC - CD = l - m$, $AB = k$, a zatem jeżeli

$$k > l - m.$$

Następnie punkt D będzie leżał zewnątrz okręgu I, jeżeli jego odległość od środka B będzie większa od promienia tego okręgu, czyli jeżeli $BD > BA$, ale $BD = BC + CD = l + m$, zaś $BA = k$, a zatem

$$k < l + m.$$

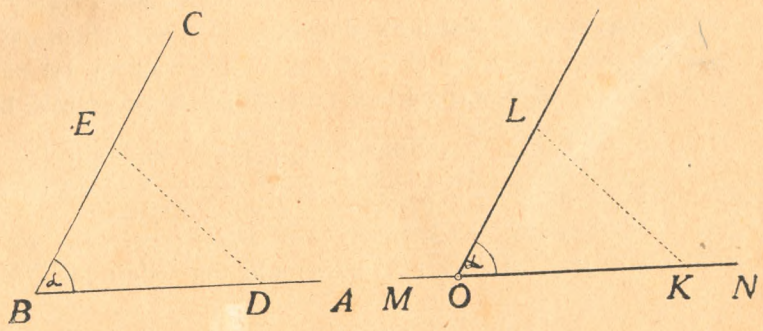
Zakładając tedy, że te dwa warunki są spełnione, możemy twierdzić, że łuki okręgów I i II przetną się z sobą i tylko w jednym punkcie. Niech tym punktem będzie E. Łącząc go z punktami B i C, otrzymamy $\triangle BCE$, którego boki są odpowiednio równe trzem odcinkom danym: $BE = BA = k$; $CE = CD = m$; $BC = l$.

Wniosek 1. Z toku rozumowania wysnuwamy następujący wniosek: z trzech danych odcinków można zbudować trójkąt pod warunkiem, że jeden z nich jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych, ale większy od ich różnicy.

Wniosek 2. W przypadku szczególnym, kiedy trzy odcinki dane są sobie równe: $k = l = m$, warunek o którym wyżej mówiliśmy, jest oczywiście spełniony, a zatem: na danym odcinku zawsze można zbudować trójkąt, który ma wszystkie trzy boki równe, czyli trójkąt równoboczny (patrz 60).

Zadanie 2. Na danej prostej przy punkcie danym wykreślić kąt równy danemu.

Niech będzie dany kąt $ABC = \alpha$ (rys. 43), pewna prosta MN i na niej punkt O. Na ramionach kąta α, począwszy od wierzchołka B, odmierzmy dwa dowolne odcinki BD i BE i połączmy ich końce odcinkiem DE, wtedy utworzy się $\triangle BDE$, do którego należy kąt α.



Rys. 43.

Zadanie polegać będzie na tem, żeby na prostej MN, odmierzywszy odcinek $OK = BD$, zbudować trójkąt równy trójkątowi BDE, t. j. zbudować trójkąt z trzech odcinków BD, BE, DE, co już dokonaliśmy w zadaniu poprzedniem.

Otrzymamy $\triangle OKL$ równy $\triangle BDE$, więc $\sphericalangle KOL = \alpha$.

W ten sposób dokonywa się „przenoszenie" kąta na daną prostą, co nam było potrzebne w dodawaniu lub odejmowaniu kątów.

Uwaga. W praktyce upraszczamy konstrukcję, biorąc $BD = BE$, czyli zakreślając z punktu B łuk promieniem równym dowolnemu odcinkowi BD. Tym samym promieniem wykreślamy łuk z punktu O, przecinający daną prostą w punkcie K. Następnie mierzymy odległość DE i tą odległością wykreślamy łuk z punktu K. Punkt przecięcia się tych łuków, czyli L, łączymy z O i otrzymujemy $\sphericalangle LOK = \alpha$.

Zadanie 3. Zbudować trójkąt, którego dwa boki są równe dwu odcinkom danym, a kąt między niemi zawarty, jest równy kątowi danemu.

Konstrukcja poprzednia: wykreślamy na jednym z danych odcinków kąt równy danemu, następnie na jego ramieniu odmierzamy odcinek równy drugiemu odcinkowi danemu.

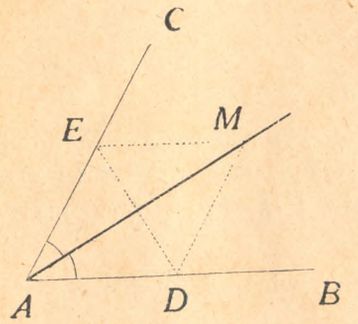
Zadanie 4. Na danym odcinku, jak na podstawie, zbudować trójkąt równoramienny o ramionach równych odcinkowi danemu.

Niech będzie dany odcinek c, który ma być podstawą, i odcinek b, który ma być ramieniem żądanego trójkąta. Mamy więc zbudować trójkąt z 3-ch odcinków danych: c, b i b.

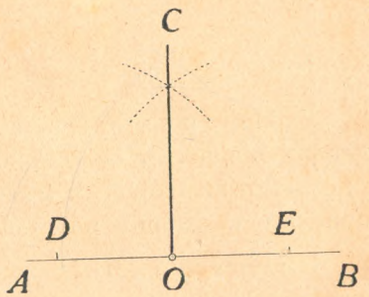
Ponieważ pierwszy odcinek jest oczywiście większy od różnicy dwóch pozostałych, więc warunkiem możliwości rozwiązania będzie $c < 2b$, czyli $b > \frac{c}{2}$. Konstrukcja, jak w zadaniu 1.

Zadanie 5. Kąt dany podzielić na połowy.

Niech będzie dany jakikolwiek kąt BAC (rys. 44). Na jego ramionach odetnijmy $AD = AE$, następnie na odcinku DE wy-



Rys. 44.



Rys. 45.

stawmy trójkąt równoramienny, z przeciwnej strony DE położony, niż DAE. Półprosta AM będzie dwusieczną danego kąta, czyli będzie $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC$, co wynikać będzie z równości trójkątów ADM i AEM.

Łatwo będzie wyrozumować, że jakakolwiek inna półprosta, wyprowadzona z wierzchołka danego kąta, podzieli ten kąt na części nierówne, dlatego że będzie położona albo wewnątrz kąta DAM, albo zewnątrz niego. Stąd wynika

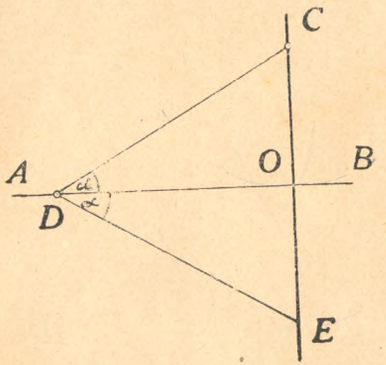
Wniosek. Dla każdego kąta istnieje tylko jedna dwusieczna.

Zadanie 6. Z punktu, położonego na danej prostej, wystawić do niej prostopadłą.

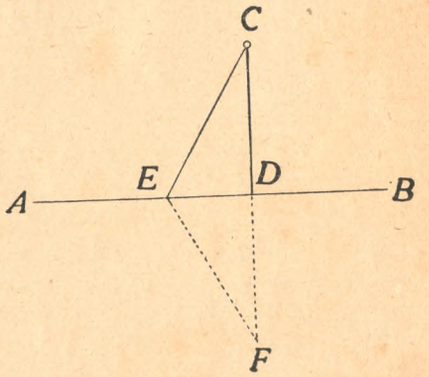
Niech będzie dana prosta AB (rys. 45) i na niej pewien punkt O. Uważając AOB jako kąt półpełny, możemy na zasadzie poprzedniej konstrukcji wykreślić jego dwusieczną. W tym celu odmierzamy $OD = OE$ i na odcinku DE, jako podstawie, wykreślamy dowolny trójkąt równoramienny. Jeżeli przez wierzchołek C tego trójkąta i przez punkt dany O poprowadzimy prostą, to ona będzie dwusieczną kąta półpełnego AOB, a zatem $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB$, więc te kąty będą proste, czyli $CO \perp AB$.

Wniosek. Powołując się na wniosek z poprzedniego zadania, możemy powiedzieć, że:
z punktu położonego na danej prostej, zawsze można wystawić do niej prostopadłą, ale tylko jedną.

Zadanie 7. Z punktu, położonego poza prostą daną, spuścić do niej prostopadłą.



Rys. 46.



Rys. 47.

Dana jest prosta AB i punkt C, poza nią położony (rys. 46). Jeżeli dowolny punkt D tej prostej połączymy z C, to otrzymamy $\sphericalangle CDB = \alpha$. Wykreślmy z drugiej strony AB kąt równy α; jeżeli teraz na ramieniu tego kąta odmierzymy odcinek $DE = DC$ i połączymy E z punktem C, to prosta EC przetnie AB (patrz pewnik ust. 36) w pewnym punkcie O. Z równości trójkątów DCO i DEO wynikać będzie równość kątów DOC i DOE, a że to są kąty przyległe, więc są proste, a zatem CE (tem samem i CO) jest prostopadłe do AB.

Wniosek. Z danego punktu zawsze można poprowadzić prostopadłą do prostej danej, ale tylko jedną.

Istotnie: przypuśćmy, że z danego punktu C (rys. 47) do prostej AB oprócz prostopadłej CD można poprowadzić jeszcze jedną prostopadłą CE.

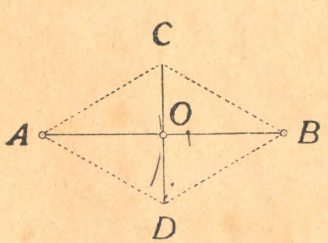
Przedłużmy CD i odmierzmy $DF = CD$, a punkt E połączmy z F, wtedy z równości trójkątów CDE i FDE (1-a cecha równości) wynikałoby, że $\sphericalangle CED = \sphericalangle FED$.

Ale kąt CED powinien być prosty z naszego założenia, a zatem i $\sphericalangle FED$ musiałby być prosty, czyli odcinek EF powinien być przedłużeniem CE, inaczej mówiąc, linja CEF musiałaby być prosta. W takim razie dwie różne proste: CDF i CEF miałyby dwa punkty wspólne, co jest niemożliwe.

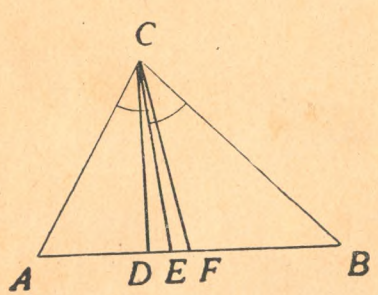
Stąd wynika, że oprócz CD niema innej prostopadłej do AB, poprowadzonej z punktu C.

Zadanie 8. Dany odcinek podzielić na połowy.

Dany jest odcinek AB (rys. 48), wystawmy na nim, jak na podstawie z każdej strony, trójkąt równoramienny (zadanie 4). Łącząc wierzchołki tych trójkątów odcinkiem CD, otrzymamy w przecięciu z AB punkt O, który będzie środkiem AB, czyli będzie $AO = OB$.



Rys. 48.



Rys. 49.

Istotnie, z konstrukcji wynika, że kąt ACB został przez CD podzielony na połowy (patrz zadanie 5), czyli będzie $\sphericalangle ACO = \sphericalangle OCB$, wtedy trójkąty AOC i COB będą równe na zasadzie 1-ej cechy równości trójkątów, stąd zaś wynika, że $AO = OB$.

W praktyce dokonywamy konstrukcji w sposób uproszczony, zakreślając z końców A i B danego odcinka promieniem dowolnym, ale na oko większym od połowy AB (dlaczego?) łuki, przecięcia tych łuków będą właśnie punktami C i D. Wykreślamy więc dwa trójkąty równoramienne równe sobie.

72. **Określenia.** Niech będzie dany jakikolwiek trójkąt ABC (rys. 49). Z wierzchołka C poprowadźmy $CD \perp AB$, następnie CE,

łącząc wierzchołek C ze środkiem E boku AC i wreszcie CF, która dzieli kąt ACB na połowy. Odcinki CD, CE, CF noszą swoje nazwy i odgrywają ważną rolę w nauce o trójkącie.

Odcinek, wyprowadzony z wierzchołka trójkąta i prostopadły do przeciwległego boku, nazywa się wysokością trójkąta (np. CD).

Odcinek, który łączy wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku, nazywa się środkową trójkąta (CE).

Odcinek dwusiecznej kąta trójkąta, ograniczony wierzchołkiem trójkąta i punktem przecięcia z przeciwległym bokiem, nazywa się długością dwusiecznej kąta w trójkącie, albo poprostu — dwusieczną (np. CF).

Rzecz jasna, że z każdego wierzchołka można wyprowadzić po trzy nazwane odcinki.

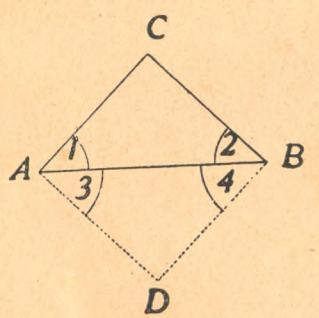
§ 12. Zależności między elementami trójkąta.

73. **Twierdzenie.** Jeżeli w trójkącie dwa kąty są sobie równe, to i boki przeciwległe są sobie równe. Krócej można powiedzieć:

Trójkąt, który ma dwa kąty równe, jest równoramienny.

Dany jest $\triangle ABC$ (rys. 50), w którym $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (albo $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$), mamy dowieść, że

$$AC = CB.$$



Rys. 50.

Dowód. Na boku AB, z przeciwnej strony niż ACB, wystawmy $\triangle ABD$ równy ABC (z 3-ch boków danego), wtedy $AC = AD$ i $CB = DB$, kąty przeciwległe też będą równe, czyli $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ i $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, a że z założenia mamy, że $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, więc również będzie

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3,$$

ta równość zaś pociąga za sobą równość przeciwległych boków, czyli $AC = BD$, a że z konstrukcji mieliśmy, że

$$BD = CB,$$

więc

$$AC = CB, \text{ co było do dowiedzenia.}$$

Wniosek. Trójkąt, który ma wszystkie kąty równe, jest równoboczny.

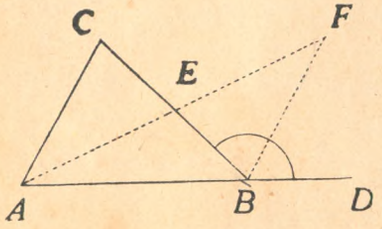
74. **Twierdzenie.** W trójkącie kąt zewnętrzny jest większy od każdego z wewnętrznych, do niego nieprzyległych.

Dany jest $\triangle ABC$ (rys. 51), przedłużmy jeden z jego boków, np. AB, wtedy utworzy się kąt zewnętrzny CBD; mamy dowieść, że

$$\sphericalangle CBD > \sphericalangle A$$

i $\sphericalangle CBD > \sphericalangle C$.

Dowód. Podzielmy bok CB na połowy w punkcie E, połączmy A i E odcinkiem AE i przedłużmy go na odległość $EF = AE$, połączmy jeszcze punkty F i B. Otrzymaliśmy dwa trójkąty: ACE i EFB, które mają:



Rys. 51.

$CE = EB$ z podzielenia,

$AE = EF$ z odmierzenia,

$\sphericalangle AEC = \sphericalangle BEF$, jako wierzchołkowe,

a więc $\triangle ACE = \triangle EFB$, stąd zaś wynikać będzie równość

$$\sphericalangle C = \sphericalangle EBF,$$

jako położonych naprzeciw boków równych AE i EF.

Ale z drugiej strony widzimy, że

$$\sphericalangle CBD > \sphericalangle CBF \text{ czyli } EBF,$$

a więc

$$\sphericalangle CBD > \sphericalangle C,$$ c. b. d. d.

W podobny sposób można dowieść, że

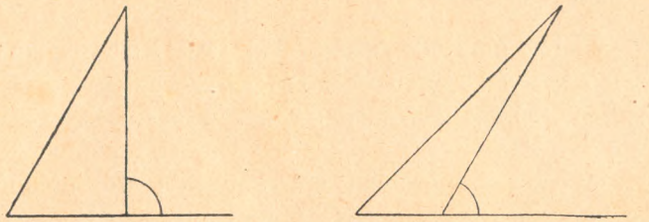
$$\sphericalangle CBD > \sphericalangle A.$$

75. **Wniosek.** Jeżeli w danym trójkącie jeden z kątów jest prosty, kąt zewnętrzny do niego przyległy jest również prosty, a zatem pozostałe kąty wewnętrzne będą od niego mniejsze, czyli ostre (rys. 52).

Tak samo, jeżeli jeden z kątów trójkąta jest rozwarty, to kąt zewnętrzny trójkąta, do niego przyległy będzie ostry, tem bardziej więc będą ostre pozostałe dwa kąty wewnętrzne trójkąta (rys. 52).

Stąd mamy wniosek następujący:

W trójkącie może być tylko jeden kąt prosty, albo rozwarty.



Rys. 52.

76. **Określenia.** Trójkąt, który ma jeden z kątów prosty, nazywa się prostokątnym. Boki, które tworzą kąt prosty, nazywają się przyprostokątnemi, a bok przeciwległy kątowi prostemu— przeciwprostokątną.

Trójkąt, który ma jeden z kątów rozwarty, nosi nazwę rozwartokątnego w odróżnieniu od trójkąta ostrokątnego, który nie ma ani kąta prostego, ani rozwartego, czyli ma wszystkie kąty ostre.

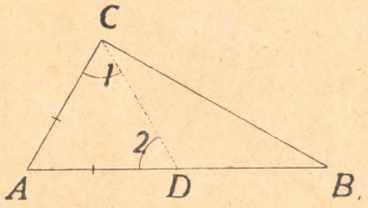
77. **Twierdzenie.** W trójkącie naprzeciw większego boku leży kąt większy.

Dany jest $\triangle ABC$ (rys. 53), w którym

$$AB > AC,$$

należy dowieść, że

$$\sphericalangle C > \sphericalangle B.$$



Rys. 53.

Dowód. Jeżeli bok AB jest większy od AC, to zawsze możemy odciąć na AB odcinek $AD = AC$, wtedy otrzymamy trójkąt równoramienny ADC, w którym będzie

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Ale kąt 2 jest zewnętrzny dla $\triangle CDB$, a zatem

$$\sphericalangle 2 > \sphericalangle B,$$

więc tak samo będzie

$$\sphericalangle 1 > \sphericalangle B.$$

A że kąt ACB, który nazwiemy dla skrócenia $\sphericalangle C$, jest oczywiście większy od $\sphericalangle 1$, więc tem bardziej

$$\sphericalangle C > \sphericalangle B,$$ c. b. d. d.

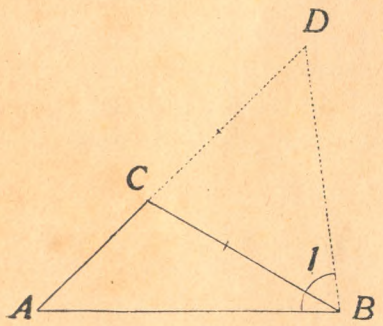
78. **Twierdzenie odwrotne.** W trójkącie naprzeciw większego kąta leży bok większy.

Dany jest trójkąt ABC (rys. 53), w którym kąt $C > \sphericalangle B$, dowieść, że $AB > AC$.

Dowieść można sposobem sprowadzenia do niedorzeczności, zakładając naprzód, że $AB = AC$, potem zaś, że $AB < AC$.

Wniosek. W trójkącie prostokątnym każda z przyprostokątnych jest mniejsza od przeciwprostokątnej.

79. **Twierdzenie.** W trójkącie każdy bok jest mniejszy od sumy dwóch boków pozostałych, ale większy od ich różnicy.



Rys. 54.

Dany jest trójkąt ABC (rys. 54), mamy dowieść, że

$$AB < AC + CB.$$

Dowód. Przedłużmy bok AC i odmierzmy $CD = CB$, wtedy otrzymamy $\triangle CDB$ równoramienny o podstawie DB, a więc $\sphericalangle D = \sphericalangle 1$. Ponieważ kąt ABD jest oczywiście większy od $\sphericalangle 1$, a zatem jest większy i od kąta D. Mamy tedy w $\triangle ABD$ dwa kąty nierówne:

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle D,$$

a więc

$$AD > AB,$$

ale

$$AD = AC + CD = AC + CB,$$

więc będzie $AC + CB > AB$,

czyli $AB < AC + CB$.

Tak samo będzie

$$CB < AB + AC,$$

stąd zaś

$$AB > CB - AC.$$

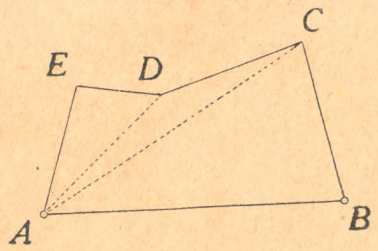
Dowiedliśmy więc, że

$$BC - AC < AB < BC + AC$$ c. b. d. d.

80. **Wniosek 1.** Przypominając sobie warunek wystarczający, który otrzymaliśmy dla rozwiązania zadania o konstrukcji trójkąta z trzech odcinków danych (71 wn. 1), możemy teraz powiedzieć:

Aby z trzech odcinków danych można było zbudować trójkąt, trzeba i wystarcza, żeby jeden z nich był mniejszy od sumy dwóch pozostałych, ale większy od ich różnicy.

81. **Wniosek 2.** Odcinek linji prostej jest krótszy od wszelkiej łamanej, łączącej te same punkty.



Rys. 55.

Jeżeli mamy dane dwa punkty A i B (rys. 55), połączone odcinkiem AB i łamaną $AEDCB$, to łącząc punkty A, C i D, otrzymujemy $\triangle ABC$, z którego mamy

$$AB < AC + CB.$$

Następnie z $\triangle ACD$:

$$AC < AD + DC.$$

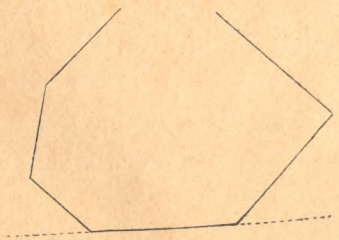
Wreszcie z $\triangle ADE$:

$$AD < AE + ED.$$

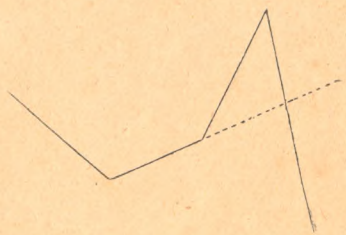
Po dodaniu i odrzuceniu po AC otrzymamy:

$$AB < AE + ED + DC + CB.$$

82. **Określenia.** Linja łamana nazywa się wypukłą (rys. 56), jeżeli leży z jednej strony każdego ze swych odcinków, w przeciwnym razie nazywa się wklęsłą (rys. 57).

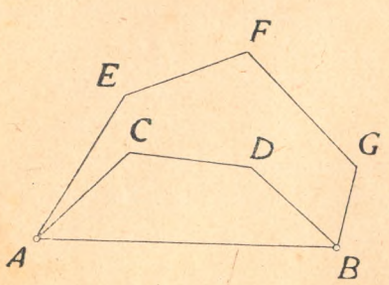


Rys. 56.

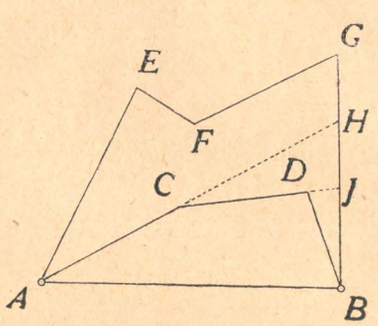


Rys. 57.

Jeżeli dwa punkty A i B (rys. 58) są połączone ze sobą odcinkiem AB i dwiema łamanemi $ACDB$ i $AEFGB$, które leżą z jednej strony odcinka AB i nie przecinają się z sobą, to powiadamy, że łamana zewnętrzna $AEFGB$ obejmuje łamaną wewnętrzną $ACDB$.



Rys. 58.



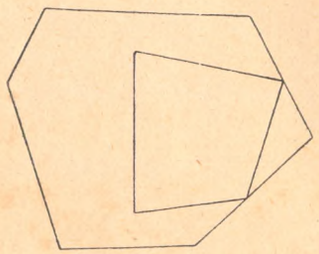
Rys. 59.

83. **Twierdzenie.** Łamana wypukła jest krótsza od wszelkiej łamanej, która ją obejmuje.

Dowód. Dana jest łamana wypukła $ACDB$ (rys. 59) i łamana ją obejmująca $AEFGB$. Przedłużmy odcinki AC i CD do przecięcia się z odcinkiem GB w punktach H i J, wtedy na zasadzie wniosku z poprzedniego twierdzenia możemy powiedzieć, że

$$AH = AC + CH < AE + EF + FG + GH,$$
$$CJ = CD + DJ < CH + HJ,$$
$$DB < DJ + IB.$$

Dodajmy te nierówności stronami, odrzucając po CH i DJ i uważając, że $GH + HJ + JB = GB$, wtedy $AC + CD + DB < AE + EF + FG + GB$, c. b. d. d.



Rys. 60.

84. **Wniosek.** Jeżeli dwa wielokąty są tak położone, że wierzchołki jednego z nich albo leżą na bokach drugiego, albo wewnątrz tego wielokąta, to możemy powiedzieć, że wielokąt zewnętrzny obejmuje wewnętrzny (rys. 60). O obwodach

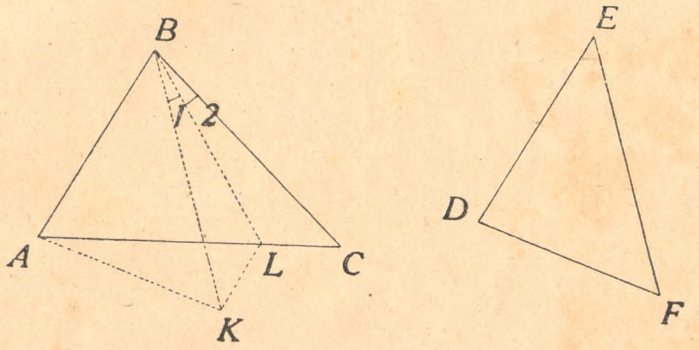
takich wielokątów, na zasadzie dopiero co dowiedzionego twierdzenia, możemy powiedzieć:

Obwód wielokąta wypukłego jest mniejszy od obwodu wszelkiego wielokąta, który go obejmuje.

Dowód jest widoczny z poprzedniego twierdzenia.

85. **Twierdzenie.** Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są odpowiednio równe dwu bokom drugiego, ale kąty między niemi zawarte są nierówne, to i trzecie boki są nierówne, a mianowicie ten bok jest większy, który leży naprzeciw większego kąta.

Wiadomo, że w trójkątach ABC i DEF (rys. 61): $AB = DE$, $BC = EF$ i $\sphericalangle B$ jest większy od $\sphericalangle E$.



Rys. 61.

Mamy dowieść, że bok AC jest większy od DF.

Dowód. Na boku AB przy punkcie B zbudujmy $\sphericalangle ABK = \sphericalangle E$, odmierzmy $BK = EF$ i połączmy K z A, wtedy $\triangle ABK = \triangle DEF$ i $AK = DF$.

Podzielmy teraz na połowy kąt KBC i niech dwusieczną będzie BL, połączmy K i L, wtedy trójkąt KBL = trójkątowi LBC, bo mają $BL = BL$, $BC = BK$ $(= EF)$ i $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; stąd wynika, że $KL = LC$.

Ale w trójkącie ALK będzie

$$AL + LK > AK$$

czyli

$$AL + LC > DF,$$

t. j.

$$AC > DF,$$ c. b. d. d.

86. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli dwa trójkąty mają po dwa boki odpowiednio równe, a trzecie boki nie-

równe, to kąty, naprzeciw tych boków położone, są nierówne, a mianowicie ten kąt jest większy, który leży naprzeciw boku większego.

Dowodzi się metodą sprowadzenia do niedorzeczności.

87. **Uwagi ogólne o twierdzeniach.** Poznane dotychczas twierdzenia i ich dowody pozwalają na wysnucie niektórych wniosków ogólnych.

Wiadomo, że twierdzenie odwrotne tworzy się z danego przez odwrócenie w niem założenia i konkluzji.

Tak np. twierdzenie: „jeżeli dwa boki trójkąta są sobie równe, to i kąty im przeciwległe są równe" odwraca się łatwo: „jeżeli dwa kąty w trójkącie są sobie równe, to i boki im przeciwległe są równe".

Ale niekiedy twierdzenie zawiera dwa założenia, wtedy dla otrzymania twierdzenia odwrotnego należy połączyć jedno z założeń z konkluzją i z tych dwóch zdań uczynić założenie nowego twierdzenia, a konkluzją będzie drugie założenie twierdzenia danego.

Np. twierdzenie: „jeżeli dwa kąty o wspólnym wierzchołku są takie, że przedłużenie jednego ramienia jest ramieniem drugiego kąta i przedłużenie drugiego ramienia jest drugiem ramieniem drugiego kąta, to te kąty są sobie równe" można odwrócić, mówiąc: „jeżeli dwa kąty o wspólnym wierzchołku są sobie równe i początkowe ramię jednego z nich jest przedłużeniem początkowego ramienia drugiego kąta, to i drugie ramię jest przedłużeniem odpowiedniego ramienia drugiego kąta".

Ponieważ w tym przykładzie wyjdzie na jedno, które ramię kąta obierzemy za początkowe, otrzymujemy jedno twierdzenie odwrotne, wogóle jednak z twierdzenia o 2-ch założeniach możemy otrzymać dwa twierdzenia odwrotne.

Jeżeli pominiemy jedno z założeń, twierdzenie odwrotne będzie fałszywe, więc nie można powiedzieć: „jeżeli dwa kąty o wspólnym wierzchołku są sobie równe, to są wierzchołkowe".

Wkrótce zobaczymy, jakie wogóle warunki muszą być spełnione, aby twierdzenie dane mogło być odwrócone.

Zastanawiając się bliżej nad twierdzeniami, któreśmy dotąd poznali, a wyrażającemi różne zależności między elementami trójkąta, możemy zauważyć, że niektóre z nich, nie mówiąc już o twierdzeniach odwrotnych względem siebie, są w pewnej wzajemnej zależności logicznej.

Mieliśmy twierdzenia:

I. Jeżeli w trójkącie dwa boki są równe, to i dwa kąty, do nich przeciwległe, są równe.

II. Jeżeli w trójkącie dwa kąty są równe, to i boki, naprzeciw nich położone, są sobie równe.

III. Jeżeli w trójkącie dwa boki są nierówne, to i kąty przeciwległe są nierówne.

IV. Jeżeli w trójkącie dwa kąty są nierówne, to i boki przeciwległe są nierówne.

Widzimy, że twierdzenie drugie jest odwrotne względem pierwszego, a czwarte względem trzeciego.

Twierdzenia III i I, w których założenie jednego jest zaprzeczeniem założenia drugiego, jak również IV i II, nazywają się przeciwnemi.

Naogół biorąc, z twierdzenia danego można otrzymać trzy twierdzenia:

I. Twierdzenie dane,
II. „ odwrotne,
III. „ przeciwne względem I,
IV. „ „ „ II.

Ogólną postacią takiej „czwórki" twierdzeń, czyli t. zw. układu zamkniętego będzie:

I. Jeżeli istnieje A, to istnieje B.
II. „ „ B, „ „ A.
III. „ nie „ A, „ nie „ B.
IV. „ „ „ B, „ „ „ A.

Łatwo można wyrozumować metodą sprowadzenia do niedorzeczności, że prawdziwość tw. I pociąga za sobą prawdziwość IV, tak samo zachowują się względem siebie tw. II i III.

Z tych rozważań dochodzimy do następujących wniosków:

1) Jeżeli są udowodnione dwa twierdzenia względem siebie odwrotne, to twierdzenia im przeciwne będą prawdziwe.

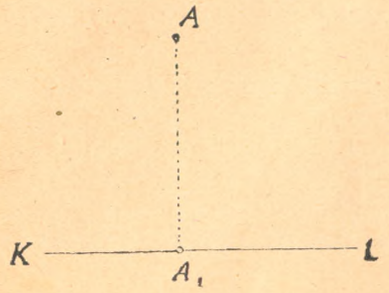
2) Jeżeli są udowodnione dwa twierdzenia sobie przeciwne, to twierdzenia względem nich odwrotne będą prawdziwe.

§ 13. Prostopadła pochyła. Trójkąty prostokątne.

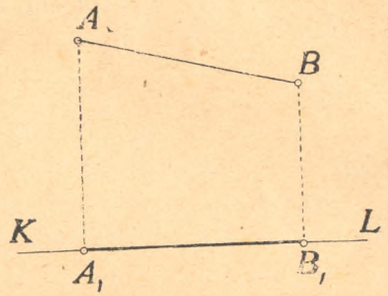
88. **Określenia.** Rzutem prostokątnym, albo krócej, rzutem punktu na daną prostą nazywamy spodek prostopadłej, spuszczonej na tę prostą.

Np. rzutem punktu A na prostą KL (rys. 62) jest punkt A_1, jeżeli $AA_1 \perp KL$. Prosta KL nosi wtedy nazwę o s i r z u t ó w.

Jeżeli mamy pewien odcinek AB (rys. 63), to dla otrzymania jego rzutu na oś KL należałoby mieć rzuty poszczególnych jego



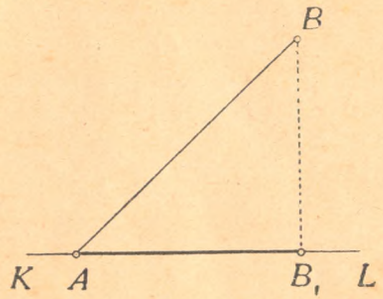
Rys. 62.



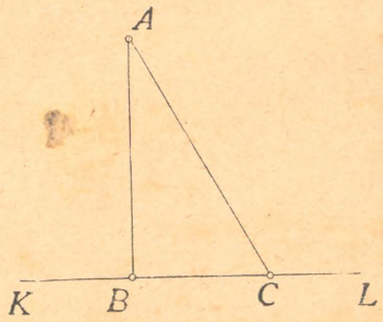
Rys. 63.

punktów, ale oczywiście wystarczy znaleźć rzuty końców; więc np. r z u t e m odcinka AB na oś KL będzie odcinek A_1B_1, który łączy rzuty jego końców.

Jeżeli odcinek AB ma jeden z końców na osi rzutów (rys. 64), to dla otrzymania jego rzutu wystarczy poprowadzić $BB_1 \perp KL$ i rzutem będzie AB_1.



Rys. 64.



Rys. 65.

Jak wiemy, z danego punktu można poprowadzić tylko jedną prostopadłą do prostej danej, a zatem wszelki inny odcinek, np. BA (rys. 64), już nie będzie prostopadły do KL, ale p o c h y ł y.

89. **Twierdzenie.** J e ż e l i z t e g o s a m e g o p u n k t u w y p r o w a d z o n o p r o s t o p a d ł ą i p o c h y ł e d o d a n e j p r o s t e j, t o p r o s t o p a d ł a j e s t k r ó t s z a, n i ż w s z e l k a p o c h y ł a.

Niech będzie dana prosta KL i punkt A (rys. 65), poprowadźmy $AB \perp KL$ i połączmy dowolny punkt C prostej KL z punktem A pochyłą AC. Mamy dowieść, że $AB < AC$.

(Jeżeli mówimy, że prostopadła jest krótsza, to mamy na myśli jej odcinek AB, tak samo odcinek AC pochyłej).

Dowód. Trójkąt ABC zawiera kąt prosty ABC, a więc kąt ACB jest ostry (patrz 75), czyli

$$\sphericalangle ACB < \sphericalangle ABC,$$

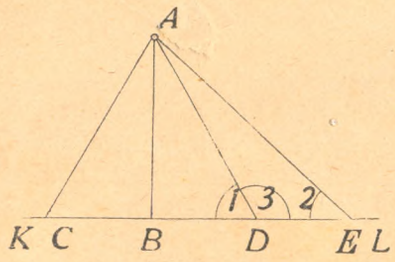
stąd zaś (patrz 78): $AB < AC$, c. b. d. d.

90. **Twierdzenie odwrotne.** N a j k r ó t s z ą o d l e g ł o ś c i ą p u n k t u o d p r o s t e j j e s t p r o s t o p a d ł a, s p u s z c z o n a z t e g o p u n k t u n a p r o s t ą.

Zakładamy, że AB (rys. 65) jest najkrótszą odległością punktu A od prostej KL, mamy dowieść, że $AB \perp KL$.

Dowód. Gdybyśmy przypuścili, że AB nie jest prostopadła do KL, to moglibyśmy poprowadzić prostopadłą i niechby nią była AC, w takim razie musiałoby być $AC < AB$, co przeczy założeniu, a zatem

$$AB \perp KL.$$



Rys. 66.

91. Na zasadzie tego twierdzenia o d l e g ł o ś ć p u n k t u o d p r o s t e j mierzy się odcinkiem prostopadłej, spuszczonej z tego punktu na prostą.

92. Niech będzie dana prosta KL i punkt A (rys. 66). Wyprowadźmy z tego punktu prostopadłą AB i pochyłe AC, AD i AE, których rzuty na KL są: CB, BD i BE.

Twierdzenie 1. D w i e p o c h y ł e, w y p r o w a d z o n e z t e g o s a m e g o p u n k t u, s ą s o b i e r ó w n e, j e ż e l i i c h r z u t y s ą r ó w n e.

Dowód. Zakładamy, że $CB = BD$; wtedy trójkąty CAB i BAD są równe, dlatego że mają bok AB wspólny, bok $CB = BD$ z za-

łożenia, a kąty CBA i ABD, między temi bokami zawarte, są równe, jako proste.

Z równości tych trójkątów wynikać będzie: $AC = AD$.

93. **Twierdzenie 2** (przeciwne). Jeżeli rzuty dwóch pochyłych, wyprowadzonych z tego samego punktu, są nierówne, to i pochyłe są nierówne (a w szczególności ta pochyła będzie większa, której rzut jest większy).

Dowód. Załóżmy, że $BE > BC$, wtedy możemy odmierzyć odcinek $BD = BC$ i połączyć D z A.

Na zasadzie poprzedniego twierdzenia będzie $AC = AD$.

Zauważmy teraz, że w $\triangle DAE$ kąt 3 jest rozwarty (dlaczego?), a więc $\sphericalangle$ 2 musi być ostry, czyli

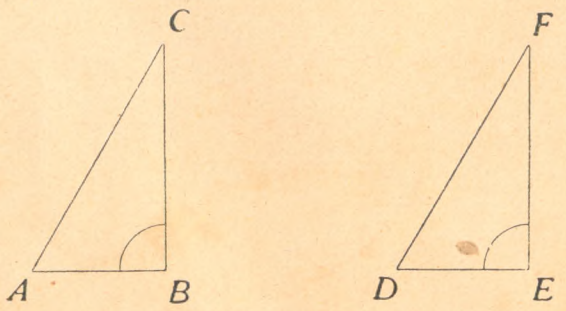
$$\sphericalangle 2 < \sphericalangle 3,$$

w takim razie będzie $AE > AD$, czyli $AE > AC$, c. b. d. d.

94. **Twierdzenie 3** (odwrotne względem 1). Dwie równe pochyłe, wyprowadzone z tego samego punktu, mają rzuty równe.

95. **Twierdzenie 4** (odwrotne względem 2). Jeżeli z tego samego punktu wyprowadzono dwie nierówne pochyłe do danej prostej, to i rzuty ich są nierówne (a w szczególności większej pochyłej będzie odpowiadał rzut większy).

96. **Równość trójkątów prostokątnych.** Niech będą dane dwa trójkąty prostokątne: ABC i DEF (rys. 67), w których kąty B i E są proste. Ponieważ takie trójkąty mają zawsze po jednym elemencie równym (kąt prosty), więc dla ich równości wystarczać będzie równość 2-ch elementów.



Rys. 67.

Ze znanych już ogólnych cech równości trójkątów wynikać będzie bezpośrednio:

1) dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli mają przyprostokątne odpowiednio równe;

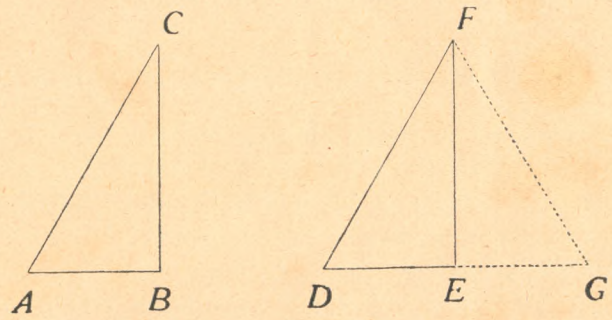
2) dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli mają po jednej przyprostokątnej równej i po kącie ostrym do niej przyległym równym.

97. **Trzecia cecha równości trójkątów prostokątnych.** Niech będą dane dwa trójkąty prostokątne ABC i DEF (rys. 68), które mają

$$AC = DF$$

i

$$BC = EF.$$



Rys. 68.

Na odcinku EF równym BC zbudujmy $\triangle EFG$ równy trójkątowi ABC, położony z przeciwnej strony odcinka, niż DEF (budując $\sphericalangle EFG = \sphericalangle ACB$; $FG = AC$ i łącząc E i G). Wtedy $\sphericalangle FEG$, jako równy kątowi B, będzie prosty, a że $\sphericalangle DEF$ był również prosty, wynikać będzie, że EG tak samo, jak DE będzie $\perp$ do EF, a więc DE i EG leżą na jednej prostej (dlaczego?). Otrzymujemy trójkąt równoramienny DFG ($DF = FG$), w którym dwusieczna FE kąta przy wierzchołku będzie jednocześnie środkową względem podstawy, czyli będzie $DE = EG$, a zatem $\triangle EFG = \triangle DEF$, więc i $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Otrzymaliśmy **twierdzenie:**

Dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli mają po jednej z przyprostokątnych i przeciwprostokątnej, odpowiednio równych.

98. **Czwarta cecha równości trójkątów prostokątnych.**
Niech będą znowu dane dwa trójkąty prostokątne: ABC i DEF (rys. poprzedni), które mają

$$AC = DF$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle D.$$

Jeżeli na odcinku DF równym AC zbudujemy trójkąt równy $\triangle ABC$, to dojdziemy do wniosku, że tym trójkątem będzie DEF, a zatem $\triangle ABC = \triangle DEF$. Mamy więc

Twierdzenie. Dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli mają po przeciwprostokątnej równej i po kącie ostrym równym.

99. **Wniosek.** W trójkątach równych odpowiednie wysokości są sobie równe.

Dowód oczywisty z ostatniego twierdzenia.

§ 14. O miejscu geometrycznem punktów.

100. Powiadamy o linji (lub wogóle o figurze), że jest miejscem geometrycznem punktów, posiadających pewną tę samą własność, jeżeli ją posiada każdy punkt tej linji (lub figury) i poza nią niema punktów, tę własność posiadających.

Tak np. okrąg jest miejscem geometrycznem punktów na płaszczyźnie, położonych w tej samej odległości (czyli równooddalonych) od jednego punktu, dlatego że: 1) każdy punkt okręgu leży w tej samej odległości od środka i 2) jakikolwiek punkt, nie leżący na okręgu, ma odległość od środka inną.

Z podanego określenia widzimy, że dla udowodnienia, iż pewna linja jest miejscem geometrycznem punktów o danej wspólnej własności, musimy dowieść dwu twierdzeń: 1) że każdy punkt tej linji spełnia żądany warunek i 2) przeciwnie: punkt, niepołożony na linji, już tego warunku spełniać nie może.

Te dwa twierdzenia, jak wiemy, pociągną za sobą jeszcze dwa odwrotne, które muszą być prawdziwe.

Możemy również udowodnić dwa twierdzenia względem siebie odwrotne, wtedy, jako konieczne następstwo, otrzymamy znowu dwa twierdzenia względem nich przeciwne, które muszą być prawdziwe.

Często zamiast „miejsce geometryczne" punktów mówi się krótko „miejsce" punktów.

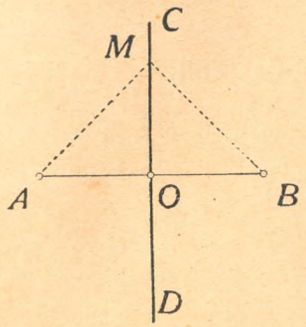
101. **Twierdzenie.** Miejscem geometrycznem punktów na płaszczyźnie, równooddalonych od dwu punktów danych, jest prosta, która przechodzi przez środek odcinka, łączącego dane punkty i jest do niego prostopadła.

Dane punkty A i B (rys. 69) połączmy odcinkiem AB.

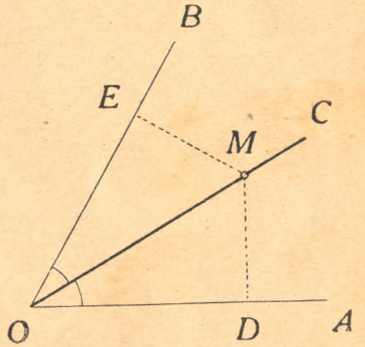
Dowód składać się będzie z dwu części:

1. Ze środka odcinka AB wystawmy prostopadłą CD i dowiedźmy, że każdy punkt, położony na CD, będzie leżał w jednakowej odległości od A i od B.

Niech będzie M dowolnym punktem na CD, połączmy go z A i z B, wtedy $MA=MB$ jako dwie pochyłe, których rzuty są równe.



Rys. 69.



Rys. 70.

2. Obierzmy dowolny punkt na płaszczyźnie, np. M, tak aby $MA = MB$ i dowiedźmy, że musi on leżeć na prostopadłej, wystawionej ze środka odcinka AB.

Istotnie, jeżeli podzielimy AB na połowy w punkcie O i połączymy punkt M z O, to otrzymamy trójkąt równoramienny AMB, w którym odcinek MO jest środkową względem podstawy AB, a zatem jest $MO \perp AB$.

Udowodniwszy powyższe dwa twierdzenia, możemy powiedzieć, że CD jest żądanem miejscem geometrycznem; oczywiście, muszą być prawdziwe jeszcze dwa twierdzenia przeciwne (jakie?).

102. **Twierdzenie.** Miejscem geometrycznem punktów, równooddalonych od ramion danego kąta, jest dwusieczna tego kąta.

Niech będzie dany kąt AOB (rys. 70) i niech OC będzie jego dwusieczną.

Dowód. Udowodnimy, że:

1. Każdy punkt, położony na OC, leży w jednakowej odległości od obu ramion kąta. Więc poprowadźmy $MD \perp OA$ i $ME \perp OB$ (patrz 90), wtedy $MD = ME$ ($\triangle ODM = \triangle OEM$).

2. Dowiedźmy odwrotnie, że jakikolwiek punkt, płoożony na danej płaszczyźnie w jednakowej odległości od ramion kąta, musi leżeć na jego dwusiecznej.

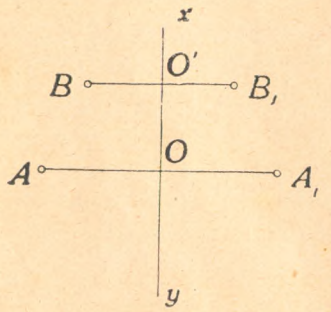
Niech takim punktem będzie M, czyli niech $MD = ME$. Łącząc ten punkt z wierzchołkiem O, otrzymamy dwa trójkąty prostokątne, które będą sobie równe (p. 97), a zatem $\sphericalangle DOM = \sphericalangle EOM$, czyli OM jest dwusieczną.

Twierdzenie jest udowodnione.

§ 15. Symetrja figur płaskich.

103. **Określenia.** Są dwa rodzaje symetrji figur na płaszczyźnie: symetrja względem prostej i względem punktu; prosta nazywa się wtedy o s i ą symetrji, a punkt — ś r o d k i e m.

Dwa punkty nazywamy s y m e t r y c z n e m i w z g l ę d e m d a n e j o s i, jeżeli leżą na odcinku prostopadłym do osi i są od niej równo oddalone.



Rys. 71.

Aby więc otrzymać punkt symetryczny z punktem A lub B względem osi xy (rys. 71), należy z punktu A lub B poprowadzić prostopadłą do tej osi i odmierzyć $OA_1 = OA$, lub $O'B_1 = BO'$.

Oczywiście, istnieje tylko jeden punkt symetryczny do danego względem danej osi (dlaczego?)

Dwie figury nazywamy symetrycznemi do siebie względem danej osi, jeżeli każdemu punktowi jednej figury odpowiada punkt drugiej figury, symetrycznie do niego względem tej osi położony.

Jeżeli dana figura jest tego rodzaju, że wszystkie jej punkty są parami symetrycznie położone względem pewnej jednej prostej, to nazywamy tę figurę symetryczną; składać się ona będzie z dwóch części, symetrycznie do siebie względem pewnej osi położonych.

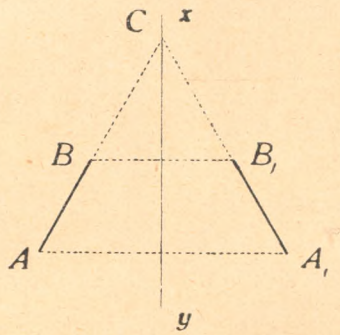
Figura symetryczna do danej nazywa się jej o b r a z e m symetrycznym.

Więc np. punkt A_1 jest obrazem symetrycznym punktu A.

104. **Twierdzenie.** O b r a z e m s y m e t r y c z n y m d a n e g o o d c i n k a w z g l ę d e m p e w n e j o s i j e s t o d c i n e k r ó w n y d a n e m u.

Weźmy naprzód odcinek AC (rys. 72), który ma jeden punkt wspólny z osią symetrji xy. Punktem symetrycznym do punktu A będzie punkt A_1, położony na prostopadłej AA_1 i będący w równej odległości od osi.

Łatwo wyrozumować, że jakikolwiek punkt odcinka AC, np. B, będzie miał obraz symetryczny, położony na A_1C. Istotnie: poprowadźmy przez punkt B prostopadłą do osi symetrji, niech ona przetnie odcinek A_1C w punkcie B_1; trójkąt AA_1C był równoramienny, więc kąt ACA_1 został podzielony osią xy na połowy, a zatem trójkąt BB_1C będzie tak samo równoramienny, dlatego że trójkąty prostokątne, na które go podzieliła oś xy, są sobie równe (2-a cecha równości trójkątów).



Rys. 72.

Ponieważ dalej, każdy punkt ma tylko jeden obraz do siebie symetryczny, widzimy, że odwrotnie: wszystkie punkty symetryczne do punktów odcinka AC będą leżały na odcinku A_1C. Możemy więc powiedzieć, że odcinek A_1C jest miejscem geometrycznem punktów symetrycznych do punktów odcinka AC, czyli jest jego obrazem symetrycznym

Oczywiście $AC = A_1C$.

To samo da się powiedzieć o odcinkach BC i B_1C:

$$BC = B_1C,$$

a stąd mamy

$$AB = A_1B_1,$$

c. b. d. d.

Uwaga. Jakby należało poprowadzić rozumowanie, gdyby dany odcinek AB (ani jego przedłużenie) nie przecinał osi, zobaczymy wkrótce.

105. Z tego, co było dotąd powiedziane, wynika:

1. O d c i n e k j e s t f i g u r ą s y m e t r y c z n ą, k t ó r e j o s i ą j e s t p r o s t o p a d ł a, p r z e c h o d z ą c a p r z e z ś r o d e k o d c i n k a.

2. Kąt jest figurą symetryczną, której osią jest dwusieczna kąta.

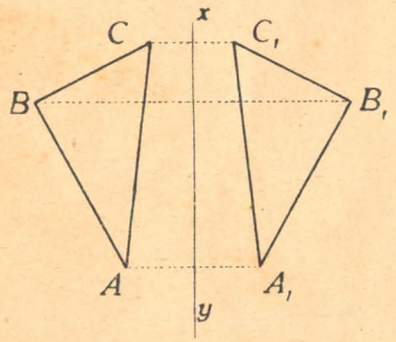
3. Trójkąt równoramienny jest figurą symetryczną względem wysokości (za podstawę wzięty jest bok nierówny).

Trójkąt równoboczny jest figurą symetryczną względem każdej ze swych wysokości.

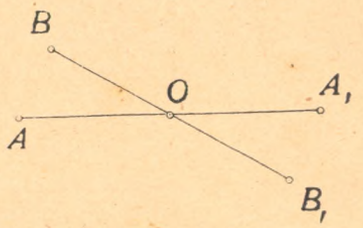
106. **Twierdzenie.** Obrazem symetrycznym trójkąta względem pewnej osi jest trójkąt równy danemu.

Dany jest trójkąt ABC i oś xy (rys. 73), jego obraz symetryczny łatwo otrzymać, znajdując obrazy wierzchołków i łącząc je odcinkami.

Z poprzedniego twierdzenia będzie oczywiste, że $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Twierdzenie łatwo można uogólnić na przypadek wielokąta.



Rys. 73.



Rys. 74.

107. **Symetrja względem punktu.** Dwa punkty nazywamy symetrycznemi względem danego punktu, jako środka, jeżeli leżą na prostej, przechodzącej przez ten punkt i są jednakowo od niego oddalone.

Ażeby więc otrzymać punkt symetryczny do A lub do B względem danego środka O (rys. 74), należy przedłużyć odcinek AO lub BO i odmierzyć $OA_1 = OA$, lub $OB_1 = OB$.

Punkt A_1 albo B_1 nazywa się obrazem symetrycznym punktu A albo B.

Oczywiście, istnieje tylko jeden punkt symetryczny do danego względem obranego środka (dlaczego?).

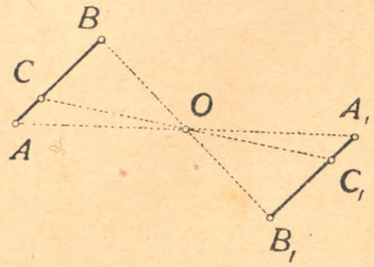
Dwie figury nazwiemy symetrycznemi do siebie względem pewnego środka, jeżeli każdemu punktowi jednej figury odpowiada punkt drugiej figury, symetrycznie do niego względem tego środka położony.

Jeżeli dana figura jest tego rodzaju, że wszystkie jej punkty są parami symetrycznie położone względem pewnego punktu jako środka, to nazywamy tę figurę symetryczną.

Np. okrąg jest figurą symetryczną względem swego środka.

108. **Twierdzenie.** Obrazem symetrycznym odcinka względem danego środka jest odcinek równy danemu.

Niech będzie dany pewien odcinek AB (rys. 75), znajdźmy punkty A_1 i B_1, symetrycznie położone do A i B względem danego środka O. Łatwo można dowieść, że A_1B_1 jest obrazem symetrycznym odcinka AB, to znaczy, że wszystkie punkty symetryczne do odcinka AB leżą na A_1B_1 i odwrotnie.



Rys. 75.

Weźmy dowolny punkt na AB, np. C, połączmy go z O i przedłużenie CO niech się przetnie z A_1B_1 w punkcie C_1; dowiedziemy, że punkt C_1 jest obrazem symetrycznym punktu C. Zauważmy naprzód, że $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ (dwa boki i kąt między niemi), a stąd będzie $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$. Następnie $\triangle AOC = \triangle A_1OC_1$ (jeden bok i dwa kąty przyległe do niego), a zatem $OC_1 = OC$.

A że każdy punkt danego odcinka AB będzie miał tylko jeden obraz symetryczny, więc możemy powiedzieć, że odcinek A_1B_1 jest miejscem geometrycznem punktów symetrycznych do punktów odcinka AB względem środka O, czyli jest obrazem symetrycznym tego odcinka.

Z równości trójkątów AOB i A_1OB_1 wynika oczywiście:

$$AB = A_1B_1.$$

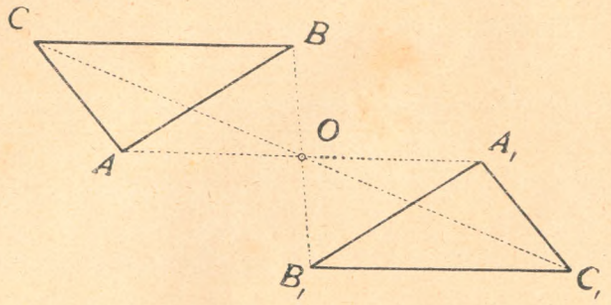
109. **Twierdzenie.** Obrazem symetrycznym trójkąta względem pewnego środka jest trójkąt równy danemu.

Dowód jest oczywisty na zasadzie poprzedniego twierdzenia (rys. 76).

Ponieważ każdy wielokąt można podzielić przekątnemi na trójkąty, więc twierdzenie łatwo rozszerzyć na wielokąt.

110. *Uwaga.* Należy zauważyć, że kiedy mowa o symetrji środkowej, to układ elementów obrazu symetrycznego jest taki sam,

jak figury danej; kiedy zaś chodzi o symetrję osiową, elementy obrazu następują po sobie w porządku przeciwnym, niż w figurze danej i dlatego równość, która zachodzi między figurą a jej obra-



Rys. 76.

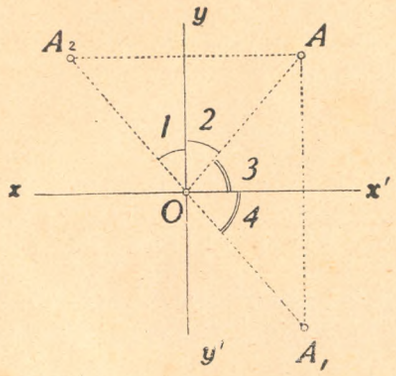
zem, niekiedy rozróżnia się jako prostą (symetrja środkowa) i równość przez odwrócenie (symetrja osiowa).

Na rysunku 77 mamy przykład figur równych przez odwrócenie.

Rys. 77.

111. **Twierdzenie.** Jeżeli pewna figura ma dwie prostopadłe do siebie osi symetrji, to punkt przecięcia się tych osi jest środkiem symetrji figury.

Dowiedziemy twierdzenia dla jednego dowolnego punktu A danej figury, która niech ma dwie osi symetrji: $xx' \perp yy'$ (rys. 78). Obrazem punktu A względem osi xx' niech będzie A_1, a względem osi yy' — A_2, połączmy punkty A_1 i A_2 z punktem O. Łatwo zauważyć, że $OA_1 = OA_2$ (każdy z tych odcinków jest równy OA, gdyż $\triangle$-ty OAA_2 i OA_1A będą równoramienne).



Rys. 78.

Dalej widzimy z tych samych trójkątów, że:

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \text{ i } \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4,$$

ale $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$ stanowią kąt prosty, a więc tak samo i $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 =$ kątowi prostemu, a zatem $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4$ daje kąt półpełny, a to dowodzi, że linja $A_2\,OA_1$ jest prosta.

Otrzymaliśmy więc, że punkty A_1 i A_2 są do siebie symetryczne względem punktu O, a to dowodzi twierdzenia.

§ 16. Ćwiczenia.

1. Dane są trzy odcinki: 6 cm, 10 cm i 4 cm. Czy z nich można zbudować trójkąt?

2. Czy trzy odcinki: 5 cm, 9 cm i 10 cm mogą utworzyć trójkąt?

3. Na jednem ramieniu kąta O odmierzono dwa kolejne dowolne odcinki: OA i AB, na drugiem ramieniu odmierzono $OC = OA$ i $CD = AB$, połączono A z D oraz B z C odcinkami AD i BC, przecinającemi się w punkcie E. Dowieść, że półprosta OE jest dwusieczną danego kąta O.

4. Dowieść, że każdy bok trójkąta jest mniejszy od połowy jego obwodu.

5. Dowieść, że wysokość trójkąta jest mniejsza od połowy sumy boków, wychodzących z tego samego wierzchołka.

6. Wewnątrz $\triangle ABC$ wzięto pewien punkt O i połączono go z wierzchołkami A i C. Dowieść, że 1) $AO + OC < AB + BC$ i 2) $\sphericalangle AOC > \sphericalangle ABC$.

7. Wewnątrz $\triangle ABC$ wzięto pewien punkt O i połączono go z wierzchołkami trójkąta. Dowieść, że suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest mniejsza od obwodu trójkąta, ale większa od połowy obwodu.

8. Dowieść, że dwa trójkąty będą równe, jeżeli mają po jednym boku równym i po dwa kąty odpowiednio równe, z których jeden jest do tego boku przyległy, a drugi przeciwległy.

9. Dowieść, że dwa trójkąty będą równe, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe i po kącie równym, przeciwległym do większego z boków.

10. Dowieść, że w trójkącie środkowa względem któregokolwiek boku jest mniejsza od połowy sumy boków pozostałych.

11. Dowieść, że w trójkącie suma wszystkich trzech środkowych jest mniejsza od obwodu trójkąta.

12—14. Dowieść, że dwa trójkąty równoramienne są sobie równe, jeżeli mają odpowiednio równe:

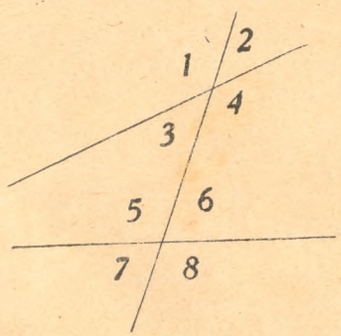
12. Podstawę i kąt do niej przyległy.
13. Podstawę i wysokość.
14. Wysokość i kąt przy wierzchołku.
15. Zbudować trójkąt równoramienny, mając jego podstawę i wysokość.
16. Zbudować trójkąt prostokątny, mając jego przyprostokątne.
17. Zbudować trójkąt równoboczny, mając dany jego bok.
18. Odcinek podzielić na 4 części równe.
19. Kąt podzielić na 4 części równe.
20. Wykreślić dwa odcinki, których suma i różnica jest dana.
21. Wykreślić dwa kąty, których suma i różnica jest dana.
22. Dowieść, że dwusieczne kątów przyległych są do siebie prostopadłe.
23. Dowieść, że dwusieczne kątów wierzchołkowych tworzą jedną prostą.
24. Na bokach: AB, BC i AC trójkąta równobocznego ABC odmierzono odcinki: $AD = BE = CF$. Dowieść, że punkty D, E i F będą wierzchołkami nowego trójkąta równobocznego.
25. Dowieść, że w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe.
26. Dowieść, że dwusieczna kąta przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest prostopadła do podstawy trójkąta oraz dzieli ją na połowy.
27. Sformułować i udowodnić twierdzenia odwrotne względem poprzedniego.
28. Dowieść, że w trójkącie boki równe mają środkowe równe. Sformułować i udowodnić twierdzenie odwrotne.
29. Dowieść, że dwusieczna kąta w trójkącie rozcina bok przeciwległy na dwa odcinki mniejsze od przyległych boków trójkąta.
Wskazówka. Przedłużyć dwusieczną na równą jej odległość, a potem zastosować twierdzenia ust. 74 i 78.
30. Jakie jest miejsce geometryczne środków okręgów, opisanych promieniem danym i przechodzących przez punkt dany?
31. Jakie jest miejsce środków okręgów, które przechodzą przez dwa punkty dane?
32. Wykreślić miejsce wierzchołków trójkątów równoramiennych, zbudowanych na wspólnej podstawie.
33. Dane są dwa punkty: A i B, położone z jednej strony prostej MN w różnych odległościach od niej. Znaleźć na prostej MN taki punkt C, żeby kąty ACM i BCN były sobie równe.
Wskazówka. Skorzystać z punktu symetrycznego.
34. Dowieść, że w poprzedniem zadaniu suma odległości $CA + CB$ będzie najmniejsza, jeżeli $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCN$.

ROZDZIAŁ III.

Proste równoległe.

§ 17. Kąty przy równoległych. Postulat Euklidesa. Wnioski.

112. **Określenia.** Jeżeli dwie jakiekolwiek proste położone na płaszczyźnie (rys. 79), przetniemy trzecią, którą wtedy nazwiemy sieczną albo poprzeczną, to utworzy się 8 kątów, mających następujące nazwy:



Rys. 79.

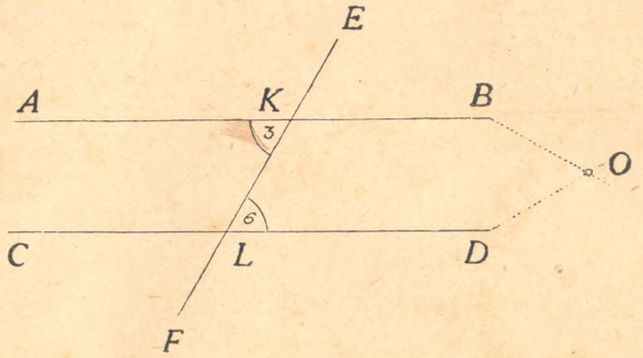
1) kąty 3 i 6 oraz 4 i 5—naprzemianległe wewnętrzne;
2) kąty 1 i 8 oraz 2 i 7—naprzemianległe zewnętrzne;
3) kąty 1 i 5, 3 i 7, 2 i 6, 4 i 8—odpowiadające;
4) kąty 3 i 5, 4 i 6—jednostronne wewnętrzne;
5) kąty 1 i 7, 2 i 8—jednostronne zewnętrzne.

Dwie proste, położone na tej samej płaszczyźnie, które nie przecinają się z sobą, jakkolwiekbyśmy je przedłużali, nazywają się równoległemi.

O istnieniu takich prostych oraz o sposobie ich wykreślania poucza następujące twierdzenie:

113. **Twierdzenie.** Dwie proste są do siebie równoległe, jeżeli z jakąkolwiek poprzeczną tworzą kąty naprzemianległe wewnętrzne równe.

Niech będą dane na płaszczyźnie dwie proste: AB i CD (rys. 80), przetnijmy je poprzeczną EF w punktach K i L i załóżmy, że $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$. Mamy dowieść, że proste AB i CD nie przecinają się z sobą, czyli są do siebie równoległe, co w skróceniu oznaczamy, pisząc $AB \parallel CD$.



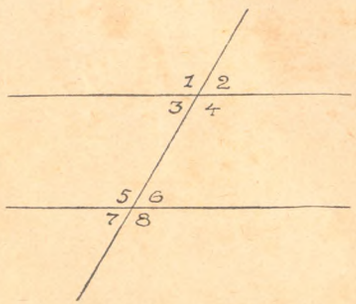
Rys. 80.

Dowód. Zastosujemy tu metodę sprowadzenia do niedorzeczności: przypuśćmy, że proste AB i CD nie są do siebie równoległe, czyli przecinają się w pewnym punkcie, który nazwiemy O.

Wtedy utworzyłby się trójkąt OKL, w którym kąt 3 byłby zewnętrzny, a więc musiałby być większy od kąta wewnętrznego 6, co przeczy założeniu.

Stąd wynika, że $AB \parallel CD$, c. b. d. d.

114. **Wnioski.** Pomiędzy 8 kątami, które tworzy poprzeczna z dwiema równoległemi, istnieją pewne zależności, więc z twierdzenia dowiedzionego wynikać będą następujące oczywiste wnioski (rys. 81):



Rys. 81.

Dwie proste będą równoległe, jeżeli z jakąkolwiek poprzeczną tworzą:

a) kąty naprzemianległe zewnętrzne równe (z równości $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$ wynika, że $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 7$),

albo b) kąty odpowiadające równe,

albo c) kąty jednostronne (wewnętrzne lub zewnętrzne) spełniające się.

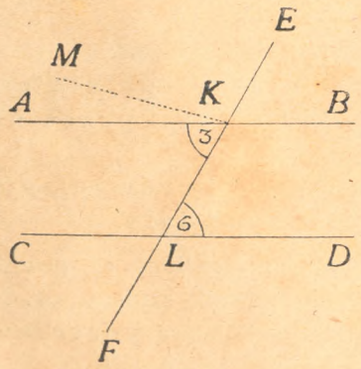
115. *Uwaga.* Przytoczony tu dowód twierdzenia podał po raz pierwszy znakomity uczony grecki *Euklides* w swojem dziele p. t. „Elementy".

Euklides żył na początku III wieku przed Chrystusem i nauczał w Aleksandrji, a stał się słynny przez napisanie swoich „Elementów", czyli zasad geometrji, po raz pierwszy ściśle naukowo potraktowanych. Niema na świecie książki naukowej, któraby cieszyła się takiem rozpowszechnieniem i rozgłosem, jak „Elementy" Euklidesa, przełożone na wszystkie prawie języki; według tego dzieła przez wieki całe nauczano geometrji po szkołach.

Jakkolwiek czytanie „Elementów" jest dość trudne, a ich ton uroczysty może dziś już czytelnika razić, to jednak jest to wzór ścisłości naukowej, którą dzięki Euklidesowi geometrja od tak dawna osiągnęła. A pojawienie się tego dzieła było tak wybitnem zdarzeniem w historji geometrji, że zwykle ją dzielą na dwa okresy: przed Euklidesem i po Euklidesie.

116. Po udowodnieniu ostatniego twierdzenia, powstaje z natury rzeczy pytanie, czy twierdzenie odwrotne lub przeciwne względem niego będzie prawdziwe, innemi słowy, czy konstrukcja, oparta na tem twierdzeniu, będzie wystarczająca do wykreślenia równoległej do prostej danej.

Zagadnienie to nie jest tak proste, jakby się napozór wydawać mogło: okazuje się mianowicie, że pewniki, które dotychczas poznaliśmy, nie dają odpowiedzi na postawione przez nas pytanie i musimy przyjąć bez dowodu następującą prawdę:



Rys. 82.

Pewnik. Przez dany punkt można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do prostej danej.

Po wprowadzeniu tego pewnika możemy już przystąpić do twierdzenia odwrotnego względem poprzedniego.

117. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to kąty naprzemianległe wewnętrzne, które one tworzą z jakąkolwiek poprzeczną, są sobie równe.

Niech będą dane dwie równoległe AB i CD (rys. 82), przetnijmy je dowolną poprzeczną w punktach K i L. Mamy dowieść, że $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$.

Dowód. Uciekniemy się tu znowu do sposobu „ad absurdum": przypuśćmy, że kąty 3 i 6 nie są równe, a mianowicie, że $\sphericalangle 3$ jest mniejszy od $\sphericalangle 6$. Wtedy moglibyśmy na prostej EF przy punkcie K zbudować kąt FKM równy kątowi 6, ale wtedy na zasadzie poprzedniego twierdzenia musiałoby być $KM \parallel CD$, a że z założenia mamy $AB \parallel CD$, więc wynikałoby stąd, że przez punkt K przechodzą dwie proste równoległe do CD, co jest niedorzeczne, bo przeczy pewnikowi.

Widzimy więc, że kąt 3 nie może być nierówny kątowi 6, a zatem $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$, c. b. d. d.

Wnioski. Z dowiedzionego twierdzenia wynikają następujące wnioski:

jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to one tworzą z jakąkolwiek poprzeczną:

a) kąty naprzemianległe zewnętrzne równe sobie,

b) kąty odpowiadające równe sobie,

c) kąty jednostronne (wewnętrzne lub zewnętrzne) spełniające się.

118. **Postulat Euklidesa.** Po udowodnieniu twierdzenia odwrotnego mamy prawo powiedzieć, że i dwa twierdzenia przeciwne będą prawdziwe.

Można również sformułować dwa wnioski przeciwne:

1) jeżeli kąty jednostronne nie są spełniające się, to dane proste nie są równoległe, czyli przecinają się z sobą;

2) jeżeli dwie proste nie są do siebie równoległe, to kąty jednostronne nie będą się spełniały.

Otóż pierwszy z tych wniosków przyjął Euklides za pewnik w swojej teorji równoległych. Ten właśnie pewnik czyli t. zw. XI pewnik Euklidesa znany jest w geometrji pod nazwą postulatu Euklidesa o równoległych prostych.

Otrzymaliśmy ten postulat, jako wniosek z udowodnionego twierdzenia dzięki temu, żeśmy wprowadzili inny pewnik, Euklides zaś obrał za punkt wyjścia swój postulat, wtedy nasz pewnik wypadnie, jako wniosek łatwy do udowodnienia.

119. **Wnioski.** Z postulatu Euklidesa i z poprzednich twierdzeń wynikają bezpośrednio następujące wnioski:

1) Dwie proste, prostopadłe do tej samej prostej, są do siebie równoległe.

2) Prosta, która przecina jedną z dwóch równoległych, przecina i drugą.

3) Prosta, prostopadła do jednej z dwu równoległych, jest prostopadła i do drugiej.

4) Dwie proste, równoległe do trzeciej, są do siebie równoległe.

Dowody pozostawiamy czytelnikowi.

120. *Uwaga.* Postulat Euklidesa o równoległych prostych nazywany bywa XI pewnikiem albo inaczej V postulatem Euklidesa, w różnych bowiem wydaniach jego „Elementów" rozróżniano pewniki, jako prawdy „wręcz oczywiste", od postulatów, które są podawane bez dowodu, jako pewne założenia, niezbędne do wyprowadzenia z nich następnych twierdzeń.

Paryskie wydanie Euklidesa z początków XIX w., uchodzące za najlepsze, zawiera, jako V postulat (z ogólnej liczby sześciu), następujące założenie:

> „Jeżeli dwie proste, przecięte sieczną, tworzą z nią kąty jednostronne niespełniające się, to te proste po przedłużeniu przecinają się z sobą z tej strony siecznej, gdzie suma rzeczonych kątów jest mniejsza od kąta półpełnego".

Ten właśnie brak „oczywistości" w postulacie V sprawił, że wielu uczonych przez wieki całe robiło próby udowodnienia go, czyli wyprowadzenia, jako wniosku, z innych pewników geometrycznych.

Pomijając mniej głośne imiona, wspomnieć godzi się, że już *Ptolemeusz* w II wieku po Chr., następnie w XIII w. *Nasir-Eddin*, w XVI w. *Clavius* zostawili w swych pracach ślady poważnych, choć bezskutecznych, usiłowań w tym kierunku, a znakomity matematyk *Gauss* (1799 r.) wypowiedział się za niemożliwością udowodnienia V postulatu Euklidesa, czyli jego niezależnością od innych pewników.

Oryginalną drogą poszli w swych dociekaniach o równoległych prawie jednocześnie, a zupełnie niezależnie od siebie: uczony rosyjski *Mikołaj Łobaczewskij* oraz węgierski matematyk *Jan Bolyai* (pierwsza połowa XIX w.), wychodząc z następującego założenia: jeżeli jest możliwe wyprowadzenie V postulatu Euklidesa z pozostałych jego postulatów, wtedy przyjmując założenie sprzeczne z tym postulatem, pozostałe zaś uważając za prawdziwe, powinniśmy dojść do wyników niedorzecznych. Tymczasem dokonana przez nich budowa geometrji, oparta na nowym postulacie, sprzecznym z euklidesowskim („przez dany punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych równoległych do prostej danej"), okazała się możliwa. Stąd wniosek, że ten postulat jest niezależny od pozostałych.

Prace Łobaczewskiego i Bolyai'a nabrały wielkiego rozgłosu w świecie naukowym, a nieco później uczony niemiecki *Riemann* zbudował również nową geometrję, zakładając wbrew V postulatowi Euklidesa, że jakąkolwiek prostą poprowadzimy przez punkt dany, zawsze ona przetnie daną prostą.

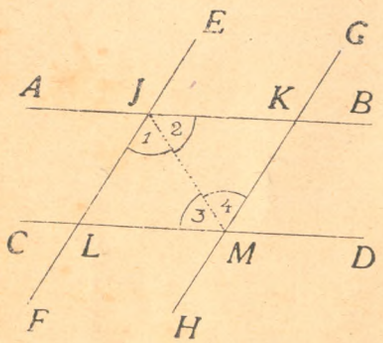
Stworzone w ten sposób nowe geometrje, które noszą ogólną nazwę „nieeuklidesowych", mogą być ciekawe z punktu widzenia czysto logicznego,

ale niewątpliwie ustępować muszą przed geometrją Euklidesa pod względem prostoty w ujmowaniu zjawisk świata zewnętrznego.

121. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając bok i dwa kąty do niego przyległe.

Na danym odcinku przy każdym z jego końców wykreślamy kąty odpowiednio równe kątom danym. Ramiona tych kątów przetną się (dlaczego?) i punkt przecięcia będzie wierzchołkiem żądanego trójkąta.

122. **Twierdzenie.** Odcinki równoległe, zawarte między dwiema równoległemi prostemi, są sobie równe.



Rys. 83.

Dane są dwie równoległe proste $AB \parallel CD$ (rys. 83), przecięte dwiema równoległemi EF i GH.

Mamy dowieść, że

$$JK = LM$$

i

$$JL = KM.$$

Dowód. Połączmy punkt J z punktem M, wtedy $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ jako naprzemianległe wewnętrzne, utworzone przez równoległe EF i GH z poprzeczną JM; dla podobnej przyczyny $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$, a zatem $\triangle JKM = \triangle JLM$. Z równości zaś tych trójkątów wynikać będzie:

$$JK = LM \text{ i } JL = KM,$$

jako położone naprzeciw kątów równych, c. b. d. d.

123. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli z przecięcia dwóch prostych dwiema innemi prostemi otrzymujemy dwa odcinki równe i równoległe, to i dwa pozostałe odcinki będą równe i równoległe.

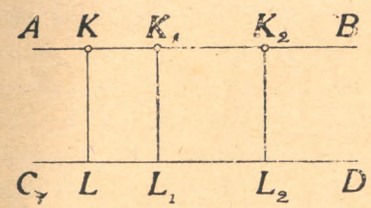
Jeżeli $JL = KM$ (rys. 83) i $JL \parallel KM$, to trójkąty JLM i JKM są sobie równe, bo mają: $JM = JM$, $JL = KM$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$, stąd zaś wynika, że $ML = JK$, a następnie $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$, a w takim razie $JK \parallel LM$.

124. **Wnioski.** 1) Niech będą dane dwie równoległe: AB i CD (rys. 84); jeżeli z dowolnych punktów prostej AB, np. K, K_1, K_2 i t.d. poprowadzimy odcinki KL, K_1L_1, K_2L_2 i t. d. prostopadłe do CD, to te odcinki będą do siebie równoległe, a więc i równe. Ponieważ

odcinkami KL, $K_1L_1\ldots$, mierzymy odległość punktów $K, K_1\ldots$, od prostej CD i temi samemi odcinkami mierzymy odległości punktów $L, L_1\ldots$ od prostej AB, więc możemy powiedzieć, że

wszystkie punkty jednej z dwóch równoległych prostych leżą w jednakowej odległości od drugiej prostej.

Każdym z tych odcinków mierzy się odległość dwóch równoległych prostych.



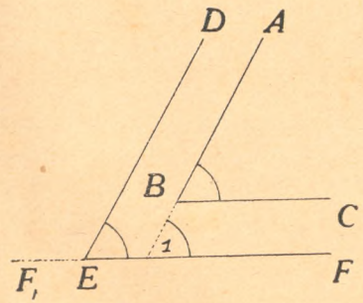
Rys. 84.

2) Jeżeli z dowolnych punktów prostej CD wystawimy do niej prostopadłe i odmierzymy na nich równe sobie odcinki LK, $L_1K_1\ldots$, to na zasadzie ostatnich dwóch twierdzeń możemy powiedzieć, że:

miejscem geometrycznem punktów równooddalonych od danej prostej jest prosta do niej równoległa.

Rzecz jasna, że ta prosta może leżeć z jednej lub drugiej strony prostej danej, więc naogół biorąc, rzeczonem miejscem geometrycznem będą dwie proste równoległe do danej, w równej od niej odległości poprowadzone.

125. **Twierdzenie.** Dwa kąty o ramionach odpowiednio do siebie równoległych albo są równe, albo się spełniają.



Rys. 85.

Dowód. Niech będą dane dwa takie kąty: ABC i DEF (rys. 85). Jeżeli przedłużymy ramię AB do przecięcia się z EF, to widać, że każdy z danych kątów jest równy $\sphericalangle 1$, a zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.

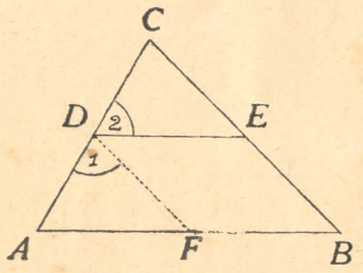
Jeżeli przedłużymy ramię EF w przeciwnym kierunku, to kąt DEF_1 będzie spełnieniem kąta DEF, jako do niego przyległy, a zatem będzie również spełnieniem kąta ABC.

126. **Twierdzenie.** Dwa kąty o ramionach odpowiednio do siebie prostopadłych albo są równe, albo się spełniają.

Kąty będą równe, jeżeli obydwa ich ramiona mają zwroty zgodne lub obydwa mają zwroty przeciwne; będą się spełniały, jeżeli jedna para ramion ma zwrot zgodny, a druga przeciwny.

Dowód na zasadzie ćwiczenia 10 (§ 6).

127. **Twierdzenie.** Prosta, która przechodzi przez środek jednego z boków trójkąta i jest równoległa do drugiego boku, dzieli bok trzeci na połowy.



Rys. 86.

Dany jest trójkąt ABC (rys. 86), którego bok AC podzielono w punkcie D na połowy i poprowadzono $DE \parallel AB$, trzeba dowieść, że $CE = EB$.

Dowód. Z punktu D wyprowadźmy $DF \parallel CB$, wtedy otrzymamy dwa trójkąty: ADF i DCE, które mają:

$AD = DC$ z założenia,

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle C$ jako odpowiadające,

$\sphericalangle A = \sphericalangle 2$ „ „

a więc $\triangle ADF = \triangle DCE$, a stąd

$$DF = CE.$$

Ale $DF = EB$ (dlaczego?), więc

$$CE = EB.$$

128. **Twierdzenie odwrotne.** Odcinek, który łączy środki dwóch boków trójkąta, jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

Dowód. 1) Gdyby odcinek DE (rys. 86) nie był równoległy do AB, to moglibyśmy z punktu D wyprowadzić inny odcinek równoległy do AB, ale wtedy musiałby on podzielić bok CB na połowy, co być nie może, bo środkiem tego boku jest z założenia punkt E.

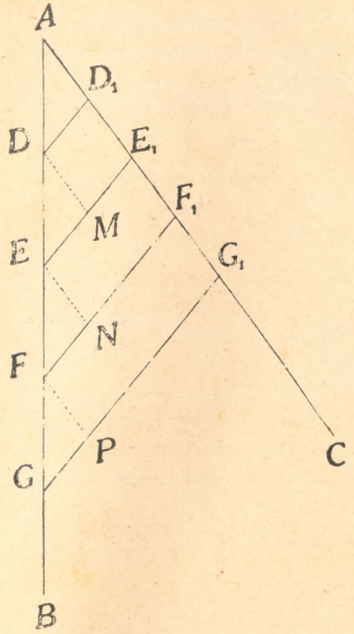
2) Z równości trójkątów ADF i CDE, które otrzymaliśmy, prowadząc $DF \parallel CB$, wynika, że $DE = AF$, ale $DE = FB$, więc

$$DE = AF = FB$$

czyli

$$DE = \frac{AB}{2}.$$

129. **Twierdzenie.** Jeżeli na jednem z ramion danego kąta, poczynając od wierzchołka, odmierzymy dowolną liczbę odcinków równych i przez ich końce poprowadzimy szereg równoległych do siebie prostych, to i na drugiem ramieniu otrzymamy taką samą liczbę odcinków sobie równych.



Rys. 87.

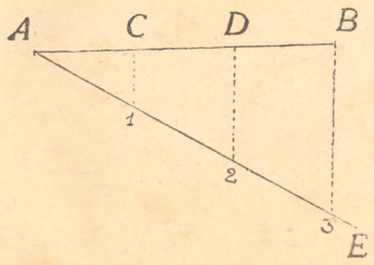
Dowód.. Dany jest kąt BAC (rys. 87), na jego ramieniu AB odmierzmy $AD = DE = EF = FG \ldots$; poprowadźmy dowolny odcinek DD_1, przecinający ramię AC w punkcie D_1, a następnie EE_1, $FF_1 \ldots$ równoległe do DD_1.

Poprowadźmy odcinki DM, EN, $FP \ldots$ równoległe do AC, dalsze rozumowanie jak w poprzedniem twierdzeniu (patrz 127), wtedy będzie:

$$AD_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = \ldots$$

130. **Zadanie.** Dany odcinek podzielić na dowolną ilość części równych.

Niech będzie dany odcinek AB (rys. 88), który chcemy podzielić np. na trzy części równe.



Rys. 88.

W tym celu z punktu A wyprowadzamy dowolną prostą AE i odmierzamy na niej, poczynając od A, trzy dowolne, ale równe sobie odcinki. Jeżeli koniec ostatniego z nich połączymy z punktem B, a przez końce pozostałych odcinków poprowadzimy równoległe do $B3$, to na zasadzie poprzedniego twierdzenia będzie

$$AC = CD = DB = \frac{AB}{3}.$$

§ 18. Ćwiczenia.

1. Przez dany punkt poprowadzić równoległą do danej prostej, opierając się na równości kątów naprzemianległych wewnętrznych.

2. Przez dany punkt poprowadzić równoległą do danej prostej, na zasadzie twierdzenia o dwu prostych prostopadłych do trzeciej.

3. Dwie równoległe przecięto jakąkolwiek poprzeczną. Dowieść, że:
   a) dwusieczne kątów odpowiadających są do siebie równoległe,
   b) dwusieczne kątów jednostronnych są do siebie prostopadłe.

4. Dwie równoległe przecięto dowolną poprzeczną. Jeden z otrzymanych kątów $= \frac{2}{5} d$. Obliczyć wszystkie pozostałe.

5. Znaleźć miejsce geometryczne punktów jednakowo oddalonych od 2-ch równoległych prostych.

6. Dowieść, że rzut odcinka na prostą jest wogóle mniejszy od tego odcinka, w jednym przypadku jest mu równy (w jakim mianowicie?).

7. Znaleźć obraz symetryczny odcinka równoległego do osi symetrji.

8. Wykreślić miejsce geometryczne punktów równooddalonych od 2-ch prostych nierównoległych, bez ich przedłużania do przecięcia się z sobą.

9. Dowieść, że prosta równoległa do podstawy trójkąta równoramiennego, odcina od niego trójkąt równoramienny.

10. Dowieść, że dwusieczne kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego tworzą z tą podstawą nowy trójkąt równoramienny.

11. Wykreślić trójkąt równoramienny, mając:
   a) podstawę i kąt przy podstawie,
   b) wysokość i kąt przy wierzchołku.

12. Podzielić odcinek na 5 części równych.

13. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość. Dowieść, że ta wysokość podzieliła kąt prosty na dwa kąty, odpowiednio równe kątom ostrym danego trójkąta.

14. Na przedłużeniach równych boków trójkąta równoramiennego odmierzono dwa równe sobie odcinki i końce ich połączono nowym odcinkiem. Dowieść, że ten odcinek jest równoległy do podstawy trójkąta.

15. W trójkącie równoramiennym jeden z kątów przy podstawie podzielono na połowy i przez koniec dwusiecznej poprowadzono równoległą do podstawy. Dowieść, że odcinek tej równoległej, zawarty między bokami trójkąta i odcinki tych boków, przylegające do podstawy, są sobie równe.

16. Dlaczego w trójkącie dwusieczne 2 ch kątów muszą się z sobą przecinać?

17. Dlaczego w trójkącie osi symetrji 2-ch boków muszą się z sobą przecinać?

18. Dlaczego 3-e zadanie o budowie trójkąta (z jednego boku i 2-ch kątów przyległych) nie mogło być rozwiązane jednocześnie z pierwszemi dwoma?

19. Dwa odcinki AB i CD dzielą się na połowy w punkcie O. Dowieść, że $AC \parallel BD$.

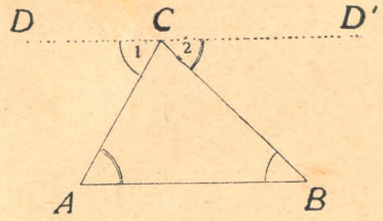
20. Jakie jest miejsce geometryczne wierzchołków trójkątów o wspólnej podstawie, jeżeli one mają wysokości równe?

§ 19. Suma kątów trójkąta i wielokąta.

131. **Twierdzenie.** W każdym trójkącie suma kątów jest równa dwu kątom prostym.

Dowód. Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 89). Jeżeli przez którykolwiek wierzchołek, np. przez C, poprowadzimy DD' równolegle do przeciwległego boku AB, to przy tym wierzchołku otrzymamy trzy kąty: $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle 2$, które w sumie tworzą kąt półpełny:

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle C + \sphericalangle 2 = 2d.$$



Rys. 89.

Ale z równoległości DD' do AB mamy:

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle B; \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle A,$$

a zatem

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2d, \text{ c. b. d. d.}$$

Wniosek 1. W trójkącie prostokątnym suma kątów ostrych jest równa kątowi prostemu.

Wniosek 2. W trójkącie równobocznym każdy z kątów jest równy $^2/_3$ kąta prostego.

Wniosek 3. Jeżeli dwa trójkąty mają po dwa kąty odpowiednio równe, to i pozostałe kąty mają równe.

Wniosek 4. Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie dwu kątów wewnętrznych, do niego nieprzyległych.

Rzeczywiście, w trójkącie ABC (rys. 90) kąt ACB jest spełnieniem $\sphericalangle A + \sphericalangle B$, ten sam kąt jest również spełnieniem kąta zewnętrznego BCD, a zatem

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle A + \sphericalangle B.$$

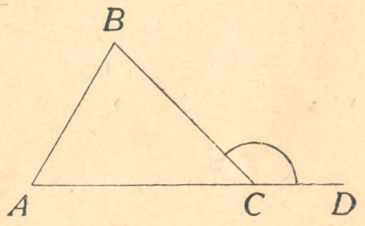
132. **Twierdzenie.** Suma kątów wewnętrznych w wielokącie wypukłym jest równa dwu kątom prostym wziętym tyle razy, ile wielokąt ma boków mniej dwa.

Jeżeli w danym wielokącie (rys. 91) z jednego wierzchołka wyprowadzimy wszystkie przekątne, to podzielimy go na trójkąty, których będzie o dwa mniej, niż boków w wielokącie.

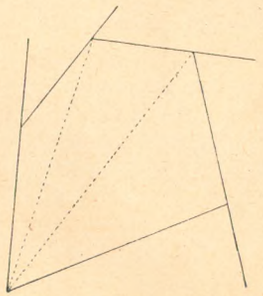
Ponieważ w każdym trójkącie suma kątów jest równa dwu kątom prostym, więc w danym wielokącie suma wszystkich kątów będzie wynosiła dwa kąty proste, powtórzone tyle razy, ile było trójkątów.

Jeżeli liczba boków wielokąta jest n, to suma kątów będzie $2d\ (n-2)$.

Więc np. w czworokącie suma kątów $= 4d$, w pięciokącie $6d$ i t. d.



Rys. 90.



Rys. 91.

Wniosek. Jeżeli przy każdym z wierzchołków wielokąta utworzymy po jednym kącie zewnętrznym (rys. 91), to łatwo zauważyć, że przy każdym wierzchołku będzie kąt półpełny $= 2d$, a suma wszystkich tych kątów będzie $= 2d.n$. W tej sumie zawierać się będą kąty zewnętrzne i wewnętrzne, a zatem sumę kątów zewnętrznych otrzymamy, jako różnicę:

$$2d.n - 2d.(n-2) = 4d,$$

t. j. suma kątów zewnętrznych w każdym wielokącie wypukłym jest równa czterem kątom prostym.

§ 20. Ćwiczenia.

1. Dane są dwa kąty trójkąta: α i β. Wykreślić kąt trzeci.

2. Dany jest jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego równy α. Wykreślić drugi kąt.

3. Kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest równy α. Wykreślić kąty przy podstawie.

4. Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego jest równy α. Wykreślić kąt przy wierzchołku.

5. Kąt prosty podzielić na trzy równe części.

6. Jaki kształt będzie miał trójkąt, jeżeli jeden z jego kątów jest równy sumie dwu pozostałych? jeżeli jest większy od tej sumy? mniejszy od niej?

7. Dowieść, że w trójkącie prostokątnym środkowa, wyprowadzona z wierzchołka kąta prostego, jest równa połowie przeciwprostokątnej.

Wskazówka. Przedłużyć środkową na równą jej odległość; otrzymamy dwa równe sobie trójkąty prostokątne.

8. Sformułować i udowodnić twierdzenie odwrotne względem poprzedniego.

9. Dowieść, że w każdym trójkącie kąt, zawarty między wysokością a dwusieczną, wyprowadzoną z tego samego wierzchołka, jest równy połowie różnicy kątów, położonych przy boku przeciwległym.

10. Na odcinku AB wystawiono trójkąt równoramienny ABC, następnie na przedłużeniu boku BC odcięto $CD = CB$ i połączono punkt D z punktem A.

Dowieść, że $AD \perp AB$. (Sposób wystawiania prostopadłej z końca danego odcinka bez jego przedłużania).

11. Dowieść, że jeżeli w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest połową drugiego, to bok, naprzeciwko niego położony, jest równy połowie przeciwprostokątnej.

12. Sformułować i udowodnić twierdzenie odwrotne.

13. Przez wierzchołki danego trójkąta poprowadzono równoległe do przeciwległych boków. Dowieść, że w otrzymanym w ten sposób nowym trójkącie kąty będą odpowiednio równe kątom danego trójkąta, a boki będą dwa razy większe.

14. Dowieść, że suma kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest równa czterem kątom prostym, niezależnie od sumy kątów wewnętrznych.

Wskazówka. Przez jeden z wierzchołków poprowadzić równoległe do przedłużeń boków wielokąta.

§ 21. Równoległoboki i ich własności. Trapez.

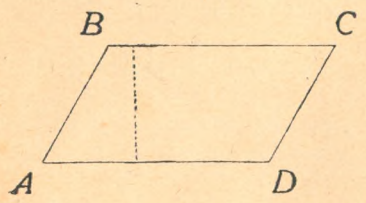
133. **Określenie.** Z pomiędzy czworokątów wypukłych wyróżniamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych; taki czworokąt nazywa się równoległobokiem.

Równoległobok otrzymujemy, jeżeli dwie równoległe przetniemy dwiema innemi równoległemi, np. $ABCD$ (rys. 92). Którykolwiek z boków, np. AD, uważa się za podstawę równoległoboku, odległość między bokami równoległemi nazywa się jego wysokością.

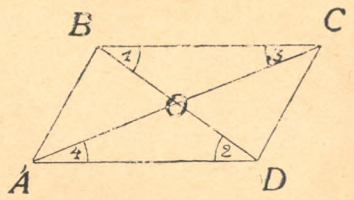
134. **Własności równoległoboku.** Na zasadzie posiadanych dotychczas wiadomości możemy wypowiedzieć następujące twierdzenia:

1. Przeciwległe boki równoległoboku są sobie równe.

2. Przeciwległe kąty równoległoboku są sobie równe, położone zaś przy jednym boku spełniają się.



Rys. 92.



Rys. 93.

3. Przekątna dzieli równoległobok na dwa równe trójkąty.

Na zasadzie 1-ej cechy równości trójkątów.

4. Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

Dowód. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 93), jego przekątne niech się przecinają w punkcie O. Otrzymujemy dwa trójkąty: BOC i AOD, które mają $BC = AD$ jako przeciwległe boki; $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ jako naprzemianległe wewnętrzne, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ dla takiej samej przyczyny, a zatem

$$\triangle BOC = \triangle AOD,$$

a stąd mamy:

$$AO = OC \text{ i } BO = OD,$$

jako położone naprzeciw kątów równych.

135. **Wnioski.** Na zasadzie 1-go i 2-go z przytoczonych poprzednio twierdzeń możemy powiedzieć, że:

1) równoległobok, który ma dwa przyległe boki równe, ma wszystkie cztery boki równe.

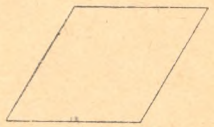
Taki rodzaj równoległoboku nazywa się rombem (rys. 94).

2) Równoległobok, który ma jeden z kątów prosty, ma wszystkie kąty proste.

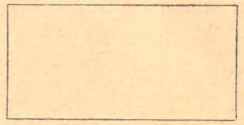
Taki równoległobok nazywa się prostokątem (rys. 95).

3) Równoległobok, który ma dwa boki przyległe równe, a kąt między niemi prosty, ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste.

Taki równoległobok nazywa się kwadratem (rys. 96). Widzimy, że kwadrat jest to romb o kątach prostych, albo prostokąt o bokach równych.



Rys. 94.



Rys. 95.

Rys. 96.

Jasną jest rzeczą, że własności równoległoboku, które były zawarte w poprzednich twierdzeniach, dotyczeć będą rombu, prostokąta i kwadratu, jako szczególnych przypadków równoległoboku. Oprócz tych własności ogólnych każda z tych trzech figur będzie miała własności swoiste, które poznamy z następujących twierdzeń.

136. **Twierdzenie.** Przekątne rombu są do siebie prostopadłe i dzielą odpowiednie kąty rombu na połowy.

Dowód. Dany jest romb $ABCD$ (rys. 97), to znaczy taki równoległobok, w którym $AB = AD$. Przekątne niech się przecinają w punkcie O.

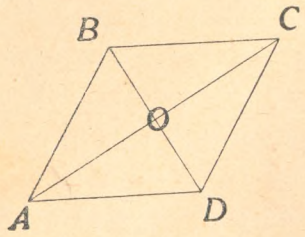
Otrzymaliśmy trójkąt równoramienny ABD, w którym AO jest środkową względem podstawy BD (dlaczego?). Stąd wynika już, że ta środkowa będzie wysokością trójkąta i dwusieczną kąta przy wierzchołku, czyli

$$AC \perp BD \text{ i } \sphericalangle BAO = \sphericalangle OAD.$$

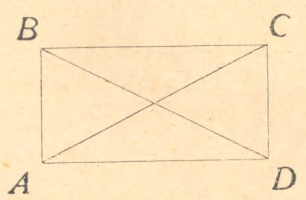
Że druga przekątna dzieli na połowy kąty B i D, jest już oczywiste.

137. **Twierdzenie.** Przekątne prostokąta są sobie równe.

Dowód wynika z równości trójkątów prostokątnych ABD i ACD (rys. 98).



Rys. 97.



Rys. 98.

138. Z łatwością można wywnioskować, że kwadrat będzie łączył w sobie własności rombu i prostokąta, a zatem jego przekątne są do siebie prostopadłe, są sobie równe i dzielą kąty kwadratu na połowy.

139. **Symetrja równoległoboków.** Do poznanych już własności równoległoboków wogóle, oraz ich szczególnych przypadków: prostokąta, rombu i kwadratu, dołączyć możemy jeszcze następujące:

1) Równoległobok jest figurą symetryczną względem punktu przecięcia się jego przekątnych.

Wynikać będzie stąd, że jakikolwiek odcinek, zawarty między równoległemi bokami i przechodzący przez punkt przecięcia się przekątnych, podzieli się w tym punkcie na połowy (dlaczego?).

Ten punkt nazywa się środkiem równoległoboku.

2) Romb ma dwie osi symetrji.

Są niemi oczywiście przekątne.

3) Prostokąt ma dwie osi symetrji (jakie?).

4) Kwadrat ma cztery osi symetrji (jakie?).

140. **Określenia.** Czworokąt, który ma jedną parę boków do siebie równoległych, nazywa się trapezem, np. $ABCD$ (rys. 99).

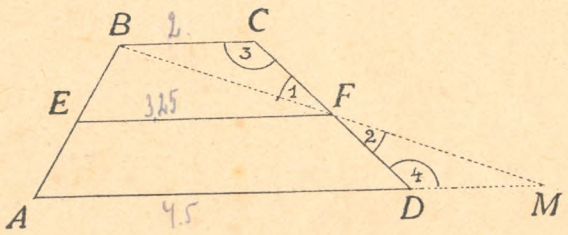
Boki równoległe nazywają się podstawami trapezu, a odległość między niemi — wysokością.

Trapez nosi nazwę równoramiennego, jeżeli ma boki nierównoległe równe sobie.

Odcinek EF, który łączy środki boków nierównoległych, nazywa się linją środkową trapezu.

141. **Twierdzenie.** Linja środkowa trapezu jest równoległa do obu podstaw i równa połowie ich sumy.

Dowód. Dany jest trapez $ABCD$ (rys. 99), niech będzie w nim E środkiem boku AB, F — środkiem CD, a odcinek EF — linją



Rys. 99.

środkową. Przez punkty B i F poprowadźmy prostą, która przetnie przedłużenie podstawy AD trapezu w punkcie M; otrzymamy dwa trójkąty: BCF i DFM, które są równe dlatego, że mają:

$CF = FD$ z założenia,
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, jako wierzchołkowe,
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, jako naprzemianległe.

Z równości tych trójkątów wynika, że

$$BF = FM.$$

W takim razie w trójkącie ABM odcinek EF łączy środki dwu boków, więc będzie

$$EF \parallel AM,$$

a także

$$EF \parallel AD.$$

Oprócz tego będzie

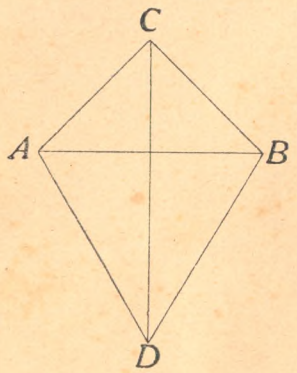
$$EF = \frac{AM}{2},$$

ale

$$AM = AD + DM = AD + BC,$$

dlatego że $DM = BC$, co widać z równości trójkątów BCF i DFM, więc ostatecznie

$$EF = \frac{AD + BC}{2}.$$



Rys. 100.

142. **Określenie.** Jeżeli na danym odcinku wykreślimy z obydwu jego stron 2 trójkąty równoramienne nierówne, to otrzymamy czworokąt, który nosi nazwę deltoidu (rys. 100).

Jego przekątne są do siebie prostopadłe, ale tylko jedna z nich dzieli się na połowy przy przecięciu z drugą. Widzimy, że deltoid jest figurą symetryczną względem jednej tylko ze swoich przekątnych.

§ 22. Ćwiczenia.

1. Sformułować i udowodnić cztery twierdzenia odwrotne względem twierdzeń ust. 134.

2. Zbudować równoległobok bez prowadzenia linij równoległych.

3. Dowieść, że czworokąt, którego przekątne dzielą się na połowy i są do siebie prostopadłe, jest rombem.

4. Zbudować romb bez prowadzenia prostych równoległych.

5. Dowieść, że czworokąt, którego przekątne są sobie równe i dzielą się na połowy, jest prostokątem.

6. Dowieść, że środki boków jakiegokolwiek czworokąta wypukłego są wierzchołkami równoległoboku.

7. Dowieść, że środki boków prostokąta są wierzchołkami rombu.

8. Dowieść, że środki boków rombu są wierzchołkami prostokąta.

9. Jakie i ile elementów trzeba i wystarcza dla równości dwu równoległoboków? prostokątów? rombów? kwadratów?

10. Czy trapez równoramienny jest figurą symetryczną i jaka jest jej oś?

11. Dowieść, że w trapezie równoramiennym przekątne są sobie równe.

(12—14) Zbudować prostokąt, mając dane:

12. dwa boki sąsiednie,

13. przekątne i kąt między niemi zawarty,

14. bok i kąt między przekątnemi.

(15—17). Zbudować romb, mając:

15. bok i jeden z kątów.

16. przekątne,

17. wysokość i jedną z przekątnych.

(18—19) Zbudować kwadrat, mając:

18. bok,

19. przekątną.

(20—23). Zbudować równoległobok, mając:

20. dwa sąsiednie boki i kąt między niemi,

21. podstawę oraz obydwie przekątne,

22. przekątne i kąt między niemi,

23. podstawę, bok i wysokość.

(24—25). Zbudować trapez, mając:

24. podstawę, jeden z boków nierównoległych i kąty przy podstawie.

25. cztery boki.

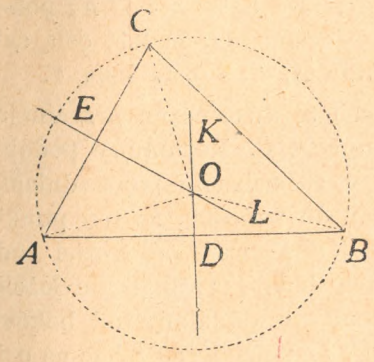
Wskazówka. Rozciąć trapez równoległą do jednego z boków na równoległobok i trójkąt.

26. Zbudować trapez równoramienny, mając jedną podstawę, bok nierównoległy i przekątną.

§ 23. Punkty szczególne w trójkącie.

143. **Twierdzenie.** Osi symetrji wszystkich trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Niech będzie dany trójkąt ABC (rys. 101), DK jest osią symetrji boku AB, EL — boku AC. Te dwie osi przecinają się z sobą (dlaczego?), niech O będzie punktem ich przecięcia.



Rys. 101.

O tym punkcie twierdzimy, że: 1) jest jednakowo oddalony od wierzchołków A i B trójkąta, bo leży na miejscu geometrycznem DK, 2) jest jednakowo oddalony od wierzchołków A i C dla podobnej przyczyny.

Stąd wynika, że punkt O jest jednakowo oddalony od wszystkich trzech wierzchołków trójkąta, więc i od B i C, a zatem musi leżeć także na osi boku BC, czyli jest punktem przecięcia się osi wszystkich trzech boków trójkąta, c. b. d. d.

144. **Wnioski.** Z tego twierdzenia bezpośrednio wynikają następujące wnioski:

1) Ponieważ, jak widzieliśmy, punkt O leży w jednakowej odległości od wierzchołków trójkąta, więc biorąc go za środek, a za

promień odcinek $OA = OB = OC$, możemy wykreślić koło, którego okrąg przechodzić będzie przez wszystkie wierzchołki trójkąta. Takie koło nazywa się kołem opisanem na trójkącie. A zatem:

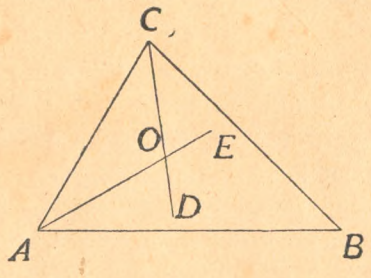
na każdym trójkącie można opisać koło.

Środek tego koła jest właśnie 1-ym punktem szczególnym trójkąta.

2) Jeżeli wierzchołki trójkąta ABC uważać będziemy za trzy dane punkty na płaszczyźnie, to możemy powiedzieć, że punkt O będzie wyznaczony, a przez to samo i koło, o którem poprzednio mówiliśmy, jeżeli tylko istnieje trójkąt, a więc jeżeli punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej. A zatem:

trzy punkty, nie położone na jednej prostej, wyznaczają koło („wyznaczają" koło, to znaczy, że je zawsze można wykreślić i tylko jedno).

145. **Twierdzenie.** Osi symetrji wszystkich trzech kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 102.

Dowód. W trójkącie ABC (rys. 102) podzielmy kąty A i C na połowy, dwusieczna AE będzie osią symetrji kąta A, CD—osią kąta C.

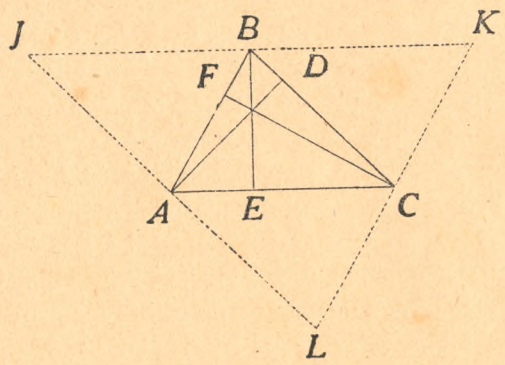
Niech te dwusieczne przecinają się w punkcie O. Rozumując podobnie jak w twierdzeniu poprzedniem, dojdziemy do wniosku, że ten punkt leży w jednakowej odległości od wszystkich boków trójkąta, a jeżeli jest jednakowo oddalony od boków AB i BC, to musi leżeć także na osi kąta B, a to dowodzi twierdzenia.

Odległości punktu O (2-go punktu szczególnego w $\triangle$-cie) od boków $\triangle$-ta będą sobie równe. Biorąc jedną z nich za promień, a punkt O za środek, otrzymać możemy koło. Co to za koło, zobaczymy wkrótce.

146. **Twierdzenie.** W trójkącie wszystkie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie.

W trójkącie ABC (rys. 103) spuśćmy wszystkie trzy wysokości: AD, BE i CF; trzeba dowieść, że przecinają się one w jednym punkcie.

Dowód. Przez wierzchołek B poprowadźmy równoległą do AC, przez C — równoległą do AB i przez A równoległą do BC. Zauważmy trzy czworokąty: $AJBC$, $ABKC$, $ABCL$, które są równoległobokami; z nich wynikać będzie, że $AC = JB = BK$, a więc B jest środkiem boku JK; dalej $AB = KC = CL$, a więc C jest środkiem boku KL; nareszcie $BC = JA = AL$, a więc A jest środkiem boku JL.



Rys. 103.

Z drugiej strony prosta AD jest prostopadła do BC z założenia, ale JL jest równoległa do BC, a zatem AD jest prostopadła do JL, podobnie $CF \perp KL$ i $BE \perp JK$.

Widzimy, że proste AD, BE i CF są prostopadłe do boków $\triangle JKL$, wystawione z ich środków, a więc, jak to już wiemy, przecinać się muszą w jednym punkcie.

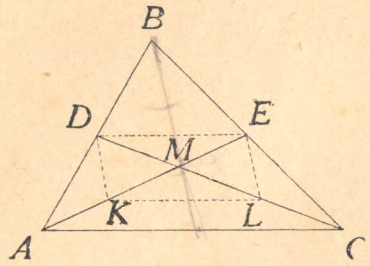
Poznaliśmy 3-ci punkt szczególny, który nazywa się ortocentrum trójkąta.

Uwaga. Dowód powyżej przytoczony został podany przez znakomitego matematyka niemieckiego *Gaussa* (1777—1855).

147. **Twierdzenie.** W trójkącie wszystkie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie.

Niech AE i CD (rys. 104) będą środkowemi trójkąta ABC, czyli niech $AD = BD$ i $BE = EC$, punktem przecięcia niech będzie M; trzeba dowieść, że trzecia środkowa musi przejść przez punkt M.

Dowód. Podzielmy odcinki AM i MC na połowy i środki ich K i L połączmy, poprowadźmy jeszcze odcinki DK, DE i EL, wtedy z trójkąta AMC widzimy, że KL jest równoległa do AC i że $KL = \frac{AC}{2}$, a z trójkąta ABC mamy, że DE jest równoległa do AC i $DE = \frac{AC}{2}$; stąd wnioskujemy, że DE jest równe i równoległe do KL, a zatem czworokąt $DELK$ jest równoległobokiem.



Rys. 104.

Z tego równoległoboku mamy, że $DM = ML$ i $KM = ME$, a że oprócz tego było $ML = LC$ i $AK = KM$, wynika, że ME jest trzecią częścią środkowej AE i DM—trzecią częścią środkowej CD. Łatwo już zrozumieć, że gdybyśmy z punktu B wyprowadzili trzecią środkową, to musiałaby się ona z CD przeciąć w takim punkcie, któryby od niej i od CD odcinał trzecią część, a że takim punktem dla CD jest M, więc i trzecia środkowa musi przejść przez punkt M.

Punkt, który poznaliśmy w tem twierdzeniu, nosi w mechanice nazwę środka ciężkości trójkąta.

ROZDZIAŁ IV.

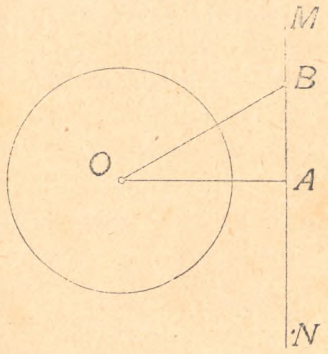
Koło.

§ 24. Położenie prostej względem koła.

148. Wiemy już, że punkt, położony na płaszczyźnie danego koła, leży albo zewnątrz koła, albo wewnątrz niego, albo wreszcie na okręgu. Tak samo każda prosta może być w trojakiem położeniu względem koła i te trzy przypadki rozważymy właśnie kolejno.

Twierdzenie. Prosta, poprowadzona w odległości od środka koła większej od jego promienia, nie ma żadnego punktu wspólnego z kołem, czyli leży całkowicie zewnątrz koła.

Dane jest koło O i prosta MN (rys. 105), której odległością od środka O będzie odcinek $OA \perp MN$. Zakładamy, że odległość OA jest większa od promienia, który dla krótkości, oznaczać będziemy r, więc $OA > r$.



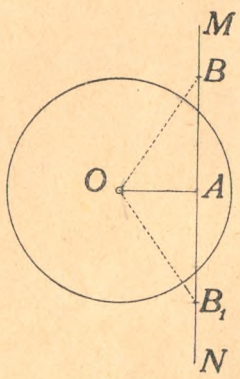
Rys. 105.

Jeżeli na prostej MN obierzemy dowolny punkt B, to jego odległość OB od środka koła będzie większa od OA ($OA \perp MN$), czyli większa od promienia, a zatem punkt B leży zewnątrz koła. Widzimy więc, że wszystkie punkty prostej MN leżą poza kołem.

149. **Twierdzenie.** Prosta, poprowadzona w odległości od środka koła mniejszej niż jego promień, ma z okręgiem dwa punkty wspólne.

Dane jest koło O i prosta MN (rys. 106), której odległość od środka O jest mniejsza od promienia czyli zakładamy, że

$$OA < r.$$



Rys. 106.

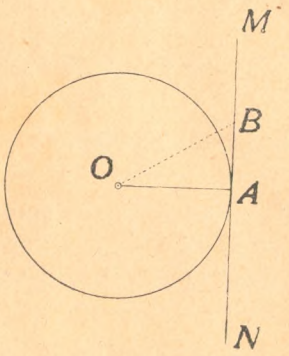
Odmierzmy na MN z obydwu stron punktu A odcinki $AB = AB_1 = r$ i połączmy ich końce ze środkiem koła.

Ponieważ $AB = AB_1 = r$, więc $OB = OB_1 > r$ (dlaczego?), a to dowodzi, że punkty B i B_1 leżą zewnątrz koła. Ponieważ dalej punkt A leży wewnątrz koła, więc na mocy znanego pewnika (patrz 57) możemy powiedzieć, że każdy z odcinków AB i AB_1 ma z okręgiem po jednym punkcie wspólnym, a to dowodzi twierdzenia.

Określenie. Prosta, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywa się sieczną względem koła.

150. **Twierdzenie.** Prosta, poprowadzona w odległości od środka koła równej jego promieniowi, ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny.

Dane jest znowu koło O i prosta MN, poprowadzona w odległości od środka równej promieniowi, czyli przechodząca przez punkt A (rys. 107) i oczywiście prostopadła do AO. Każdy punkt tej prostej, oprócz A, będzie leżał od środka koła w odległości większej od promienia, np. będzie $OB > OA$, a więc każdy inny punkt tej prostej, prócz A, będzie leżał zewnątrz koła, c. b. d. d.



Ryc. 107.

Określenie. Prosta, która ma z okręgiem jeden tylko punkt wspólny, nazywa się styczną do koła. Nawzajem koło (albo okrąg) nazywa się stycznem do tej prostej. Punkt wspólny okręgu i prostej nazywa się ich punktem styczności.

151. Jeżeli pierwsze dwa twierdzenia niniejszego rozdziału połączymy w jedno, to ono będzie przeciwne względem trzeciego.

Stąd wnosimy, że twierdzenia względem nich odwrotne będą prawdziwe.

Z tych twierdzeń wyróżnimy jedno:

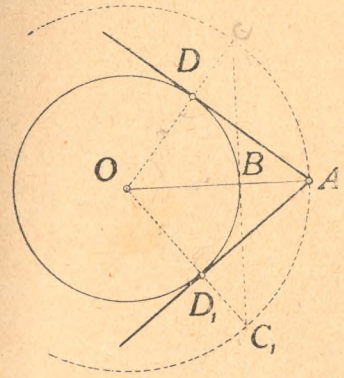
Styczna do koła leży od jego środka w odległości równej promieniowi, inaczej mówiąc:

styczna jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt styczności.

Wniosek. Przez dany punkt okręgu można poprowadzić tylko jedną styczną.

152. Z tego, co było powiedziane, widoczny jest sposób wykreślania stycznej w punkcie położonym na danym okręgu. Jak poprowadzić styczną z punktu zewnętrznego, poucza następujące zadanie.

Zadanie. Z punktu danego zewnątrz koła poprowadzić do niego styczną.



Rys. 108.

Dane jest koło O i punkt zewnętrzny A (rys. 108). Poprowadźmy odcinek OA i przez jego punkt przecięcia B z okręgiem prostopadłą do niego. Jeżeli teraz ze środka O promieniem OA opiszemy okrąg, to on przetnie się z tą prostopadłą w punkcie C. Łącząc punkt C ze środkiem O odcinkiem OC, przetniemy okrąg koła danego w punkcie D. Punkty A i D wyznaczają prostą AD, która będzie żądaną styczną.

Istotnie: trójkąty ODA i OCB są równe, dlatego że mają: $OD = OB$, $OA = OC$ i $\sphericalangle DOA$ mają wspólny. Z równości tych trójkątów wynika, że kąt ODA jest prosty, jako równy kątowi OBC, a więc prosta AD jest styczną.

Widzimy dalej, że okrąg, opisany promieniem OA, przetnie się z prostopadłą BC jeszcze w drugim punkcie C_1, który będzie symetrycznie do C położony względem OA, a zatem z drugiej strony odcinka OA otrzymamy jeszcze jedną styczną AD_1. Zadanie ma zatem dwa rozwiązania.

Wniosek. Z równości trójkątów prostokątnych ODA i OD_1A wynikać będzie, że $AD = AD_1$ czyli

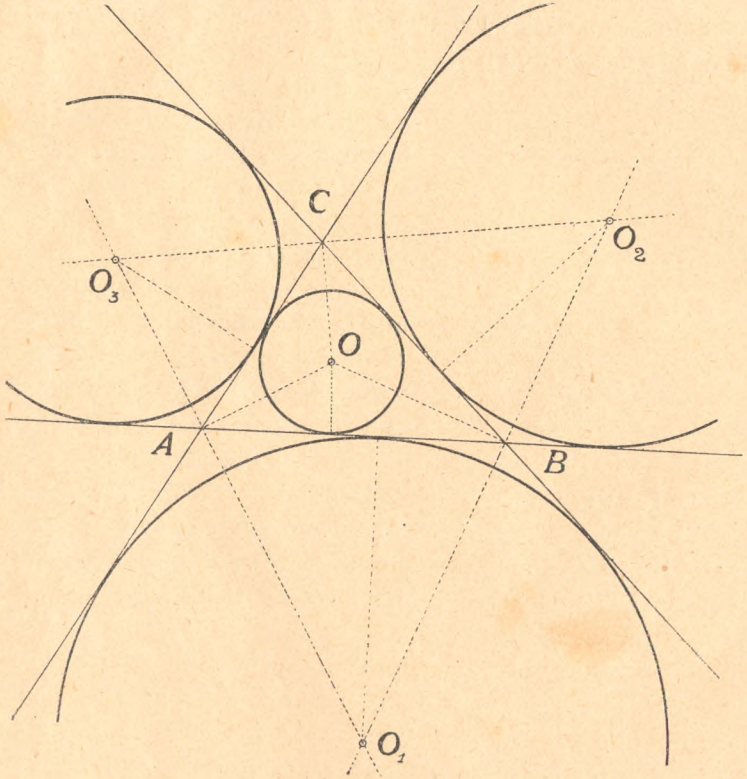
styczne do koła, wyprowadzone z danego punktu zewnętrznego, są sobie równe.

Pamiętać należy, że mówiąc o równości stycznych, mamy na myśli odcinki stycznych, liczone od punktu, z którego zostały wyprowadzone, do punktów styczności.

153. **Określenie.** Koło nazywa się wpisanem w trójkąt, jeżeli jest styczne do wszystkich boków trójkąta; nawzajem trójkąt nazywa się wtedy opisanym na kole.

Zadanie. W dany trójkąt wpisać koło.

Z określenia koła wpisanego wynika, że odległości jego środka od boków trójkąta będą promieniami tego koła, a zatem będą sobie równe, a więc środkiem koła będzie punkt, w którym przecinają się dwusieczne kątów trójkąta (2-gi punkt szczególny trójkąta, ust. 145). Stąd już oczywisty jest sposób rozwiązania:



Rys. 109.

podzielić dwa kąty na połowy, punkt przecięcia się dwusiecznych będzie środkiem koła wpisanego, a promieniem odcinek prostopadły do boku (rys. 109). Rozwiązanie będzie zawsze możliwe i tylko jedno, czyli

w każdy trójkąt zawsze można wpisać koło.

Zadanie można rozszerzyć, biorąc pod uwagę koło styczne nietylko do boków trójkąta, ale i do ich przedłużeń, czyli wykreślić koło styczne do trzech prostych danych, przecinających się z sobą po dwie.

W tym celu podzielmy na połowy dwa kąty zewnętrzne $\triangle ABC$ przy wierzchołkach A i B, punkt przecięcia się tych dwusiecznych O_1 będzie środkiem koła stycznego do boku AB trójkąta i do przedłużeń dwu pozostałych boków. (Łatwo się przekonać, że przez punkt O_1 przechodzić będzie również dwusieczna kąta wewnętrznego ACB).

Promieniem tego koła będzie odcinek, poprowadzony z O_1 i prostopadły do boku AB albo, co na to samo wyjdzie, prostopadły do przedłużenia boku AC lub BC.

W taki sposób otrzymamy trzy koła, których środkami będą: O_1, O_2, O_3. Takie koła noszą nazwę zawpisanych w $\triangle ABC$.

Wogóle więc zadanie o kole stycznem do trzech prostych ma cztery rozwiązania.

§ 25. Własności średnicy. Odległość punktu od okręgu.

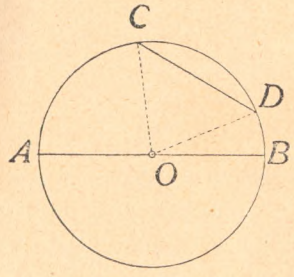
154. **Twierdzenie.** Średnica koła jest większa od każdej cięciwy.

Dowód. Dane jest koło (rys. 110), poprowadźmy w niem średnicę AB i dowolną cięciwę CD. Jeżeli końce tej cięciwy połączymy ze środkiem O koła, otrzymamy $\triangle COD$, z którego mamy

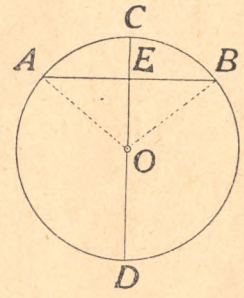
$$CO + OD > CD$$

czyli

$$AO + OB = AB > CD.$$



Rys. 110.



Rys. 111.

155. **Twierdzenie.** Średnica, prostopadła do cięciwy, dzieli ją na połowy.

Dane jest koło (rys. 111), a w niem cięciwa AB i średnica $CD \perp AB$. Jeżeli końce cięciwy połączymy ze środkiem koła, otrzymamy trójkąt równoramienny AOB, w którym OE jest wysokością, a zatem będzie $AE = EB$.

156. **Twierdzenie odwrotne.** Średnica, która dzieli cięciwę na połowy, jest do niej prostopadła.

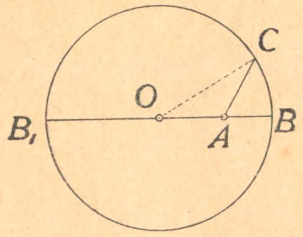
Dowód oczywisty z trójkąta AOB.

Uwaga. Poprzednie twierdzenie miało dwa założenia, więc powinny być dwa twierdzenia względem niego odwrotne. Sformułowanie i udowodnienie drugiego twierdzenia jest oczywiste.

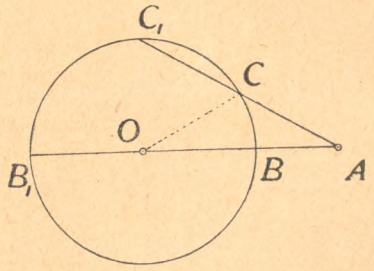
Wniosek 1. Koło jest figurą symetryczną względem każdej średnicy.

Wniosek 2. Miejscem geometrycznem środków wszystkich cięciw do siebie równoległych jest średnica koła, prostopadła do jednej z nich.

157. Niech będzie dane koło O i pewien punkt A wewnętrzny (rys. 112), lub zewnętrzny (rys. 113).



Rys. 112.



Rys. 113.

Jeżeli ten punkt połączymy z jakimkolwiek punktem C okręgu, to odcinek AC będzie odległością danego punktu od punktu C okręgu; oczywiście ta odległość będzie różna dla różnych punktów okręgu. Może zachodzić pytanie: który punkt okręgu jest najbliższy, albo najdalszy punktu A?

Twierdzenie. Najmniejszą odległością danego punktu od okręgu jest odcinek, którego *przedłużenie* przechodzi przez środek koła; największą zaś jest odcinek, *który* przechodzi przez środek koła.

Poprowadźmy przez punkt dany i przez środek koła sieczną, przecinającą okrąg w punktach B i B_1. Jeżeli połączymy punkt dowolny C okręgu ze środkiem koła, to mamy dla punktu A, położonego wewnątrz koła:

$$AB = OB - OA = OC - OA,$$

ale z $\triangle OCA$:

$$OC - OA < AC,$$

więc

$$AB < AC.$$

Dla punktu A zewnętrznego otrzymamy to samo.

Z drugiej strony

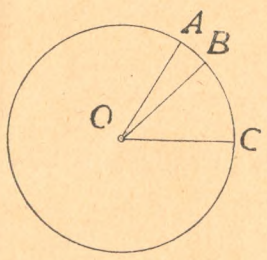
$$AB_1 = OA + OB_1 = OA + OC > AC.$$

Tak samo będzie $AB_1 > AC_1$ (z trójkąta OC_1A).

Tym właśnie najmniejszym odcinkiem AB mierzymy odległość punktu od okręgu.

§ 26. Własności łuków i cięciw.

158. **Określenia.** Jeżeli końce łuku AB (rys. 114) połączymy ze środkiem koła, to otrzymamy kąt AOB, który nazywa się kątem środkowym; a więc kąt środkowy jest utworzony przez dwa promienie koła. Dwa łuki w danem kole będziemy nazywali równemi, jeżeli odpowiadające im kąty środkowe są równe; jeżeli kąty środkowe są nierówne, to powiemy, że większemu kątowi odpowiada łuk większy.



Rys. 114.

Punkt wewnętrzny łuku, np. B na łuku AC, dzieli go na dwie części: AB i BC; wtedy powiadamy, że AC jest sumą łuków AB i BC, zaś łuk BC jest różnicą łuków AC i AB.

Widzimy zatem, że dwa łuki tego samego koła możemy łączyć znakami równości, nierówności oraz znakami działań arytmetycznych, wnosimy więc stąd, że łuki należą do wielkości geometrycznych i do nich, podobnie jak do odcinków i kątów, możemy stosować pewniki ogólne (patrz 32).

Zobaczymy zaraz, jaka istnieje zależność między łukami tego samego koła a odpowiadającemi im cięciwami. Należy jednak zauważyć, że każdej cięciwie odpowiadają w kole dwa łuki i dwa kąty środkowe: jeden wypukły, drugi wklęsły; jeżeli więc będziemy mówili o cięciwie odpowiadającej łukowi, będziemy mieli na myśli

jeden z tych kątów, a zatem i jeden z łuków, mianowicie ten łuk, który odpowiada kątowi środkowemu wypukłemu, czyli łuk mniejszy od półokręgu.

159. **Twierdzenie.** W każdem kole równym łukom odpowiadają cięciwy równe.

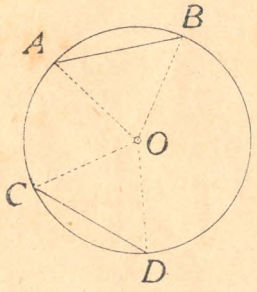
Dane jest koło O (rys. 115) i dwa równe łuki.

$$\smile AB = \smile CD.$$

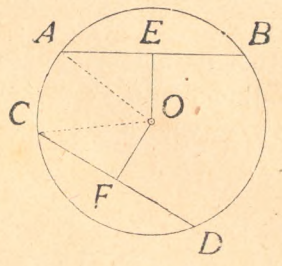
Jeżeli końce tych łuków połączymy ze środkiem koła, to otrzymamy dwa trójkąty równe:

$$\triangle OAB = \triangle COD,$$

jako mające po dwa boki równe i po kącie między niemi zawartym odpowiednio równym. Stąd już mamy, że cięciwy AB i CD są równe.



Rys. 115.



Rys. 116.

160. **Twierdzenie odwrotne.** W każdem kole równym cięciwom odpowiadają łuki równe.

Wynika z równości trójkątów AOB i COD (rys. 115).

161. Dowiódłszy poprzednich 2-ch twierdzeń, mamy prawo powiedzieć, że twierdzenia względem nich przeciwne będą prawdziwe (sformułować je), a następnie wykazać, że:

1) w każdem kole większemu łukowi odpowiada cięciwa większa,

2) w każdem kole większej cięciwie odpowiada łuk większy.

162. **Twierdzenie.** W każdem kole równe cięciwy są równo oddalone od środka koła.

Dane jest koło O (rys. 116) i dwie cięciwy AB i CD; odległością pierwszej od środka koła jest odcinek $OE \perp AB$, drugiej — odcinek $OF \perp CD$.

Zakładamy, że $AB = CD$,
mamy dowieść, że $OE = OF$.

Dowód. Połączmy punkty A i C ze środkiem koła, wtedy otrzymamy dwa trójkąty prostokątne równe sobie: $\triangle AOE = \triangle COF$, dlatego że mają:

$OA = OC$ i $AE = CF$, gdyż AE jest połową cięciwy AB (patrz 155), tak samo $CF = \frac{1}{2} CD$, więc będzie $OE = OF$.

163. **Twierdzenie.** W każdem kole większa z dwóch cięciw jest bliżej środka koła położona.

W kole O (rys. 117) dane są dwie cięciwy AB i CD, ich odległości od środka koła są:

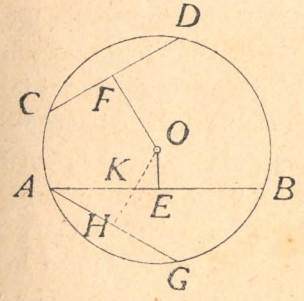
$$OE \perp AB \text{ i } OF \perp CD.$$

Zakładamy, że

$$AB > CD,$$

mamy dowieść, że

$$OE < OF.$$



Rys. 117.

Dowód. Odmierzmy na okręgu $\smile AG = \smile CD$, wtedy cięciwy AG i CD będą równe i ich odległości od środka koła będą równe:
$OH = OF$, gdzie $OH \perp AG$.

Odcinek OH przetnie się z cięciwą AB (dlaczego?) w pewnym punkcie K i otrzymamy:

$$OE < OK, \text{ jako prostopadła i pochyła,}$$

ale oczywiście

$$OK < OH,$$

więc $$OE < OH,$$

czyli $$OE < OF.$$

164. Ostatnie dwa twierdzenia możemy odwrócić i wypowiedzieć jeszcze dwa twierdzenia:

1) W każdem kole cięciwy, równo oddalone od środka koła, są sobie równe.

2) W każdem kole ta z dwóch cięciw jest większa, która leży bliżej środka koła.

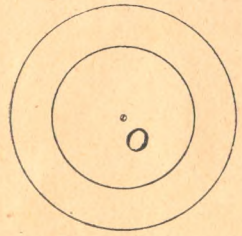
Stąd wynika, że średnica koła jest największą z cięciw, o czem już wiemy skądinąd.

Uwaga. W twierdzeniach poprzednich mówiliśmy o cięciwach tego samego koła, możemy to samo oczywiście powiedzieć o cięciwach w dwu równych kołach.

§ 27. Położenie dwu kół względem siebie.

165. **Określenia.** Dwa koła, które mają wspólny środek, nazywają się spółśrodkowemi, inaczej koncentrycznemi (rys. 118), w przeciwnym razie nazywamy je niespółśrodkowemi lub ekscentrycznemi (rys. 119).

Prostą, która przechodzi przez środki dwu kół niespółśrodkowych, nazywamy linją środków tych kół.



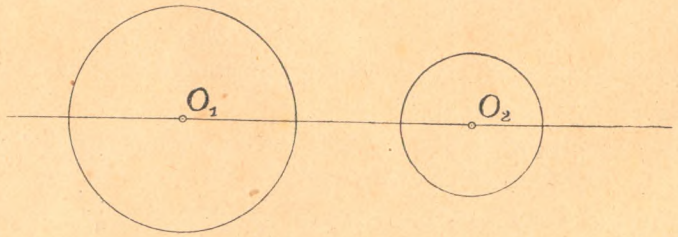
Rys. 118.

166. Dwa koła niespółśrodkowe mogą być względem siebie różnie położone zależnie od tego, w jakiej odległości od siebie leżą ich środki.

Twierdzenie. Jeżeli odległość środków dwu okręgów jest mniejsza od różnicy ich promieni, to okręgi nie mają żadnego punktu wspólnego i jeden leży całkowicie wewnątrz drugiego.

Dowód. Środkiem większego okręgu niech będzie O_1, promieniem r_1 (rys. 120), środkiem mniejszego O_2 i promieniem r_2.

Poprowadźmy linję środków do przecięcia mniejszego okręgu w punkcie B (więc $O_2 B = r_2$).

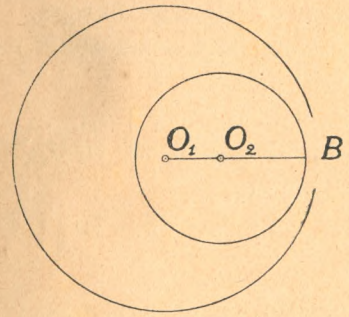


Rys. 119.

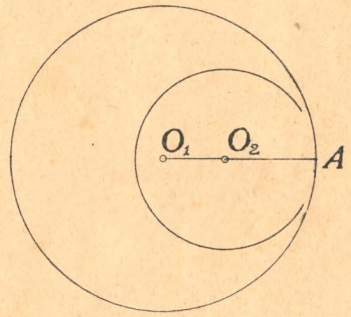
Zakładamy, że $O_1 O_2 < r_1 - r_2$,
czyli $O_1 O_2 < r_1 - O_2 B$,
stąd mamy $O_1 O_2 + O_2 B < r_1$,
czyli $O_1 B < r_1$.

A zatem punkt B leży wewnątrz większego koła, a że odcinek $O_1 B$ jest największy z odcinków, jakie można poprowadzić z punktu O_1 do okręgu mniejszego (patrz 157), więc tem bardziej inne punkty tego okręgu będą leżały wewnątrz koła pierwszego.

167. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków dwu okręgów jest równa różnicy ich promieni, to okręgi mają tylko jeden punkt wspólny.



Rys. 120.



Rys. 121.

Dowód. Jeżeli $O_1 O_2 = r_1 - r_2$ (rys. 121), to wykreśliwszy linję środków $O_1 O_2$ do przecięcia się z większym okręgiem w punkcie A, będziemy mieli $r_1 = O_1 A$, a więc będzie $r_2 = O_2 A$ (jako różnica między $r_1 = O_1 A$ i $O_1 O_2$) czyli $O_2 A$ będzie promieniem mniejszego koła. Stąd widzimy, że punkt A jest wspólnym dla danych okręgów. Ponieważ zaś odcinek $O_1 A$ jest największy z odcinków, jakie można poprowadzić z punktu O_1 do okręgu O_2, więc wszystkie inne punkty tego okręgu będą leżały wewnątrz 1-go koła.

168. Dwa okręgi, które mają tylko jeden punkt wspólny, nazywają się stycznemi do siebie i jeżeli są tak położone, że wszystkie pozostałe punkty jednego z nich leżą wewnątrz drugiego, powiadamy, że są styczne wewnętrznie.

Wniosek. Punkt wspólny dwu wewnętrznie stycznych do siebie okręgów leży na linji środków.

169. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków dwóch okręgów jest większa od różnicy ich promieni, ale mniejsza od ich sumy, okręgi mają dwa punkty wspólne.

Dowód. Jeżeli $O_1 O_2 > r_1 - r_2$ (rys. 122), to nazywając punkty przecięcia linji środków z mniejszym okręgiem przez B i C, mamy $r_2 = O_2 C$, więc

$$O_1 O_2 > r_1 - O_2 C$$

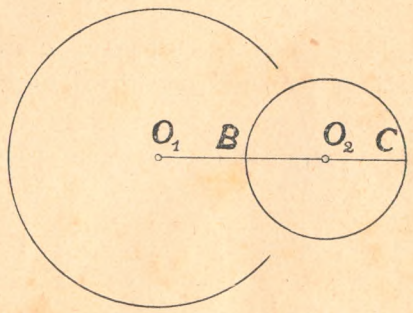
stąd

$$O_1 O_2 + O_2 C > r_1$$

czyli

$$O_1 C > r_1,$$

a to dowodzi, że punkt C leży *zewnątrz* większego okręgu.



Rys. 122.

Następnie z założenia mamy również

$$O_1 O_2 < r_1 + r_2,$$

skąd, zakładając, że $O_1 O_2 > r_2$ otrzymujemy

$$O_1 O_2 - r_2 < r_1,$$

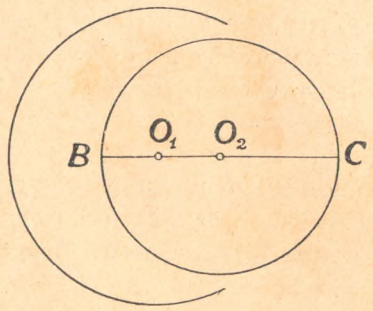
a zatem

$$O_1 B < r_1,$$

co dowodzi, że punkt B leży *wewnątrz* większego okręgu.

Widzimy więc, że mniejszy okrąg, jako łączący punkty B i C, które należą do różnych części okręgu 1-go, musi go przecinać w 2-ch punktach, położonych z różnych stron linji środków.

W dowodzeniu tem założyliśmy, że $O_1 O_2 > r_2$; gdyby zaś było $O_1 O_2 = r_2$, to wtedy punkt B musiałby być środkiem większego okręgu, a więc przez to samo leżałby wewnątrz niego.



Rys. 123.

Jeżeli wreszcie $O_1 O_2 < r_2$, to wtedy rys. 123)

$$O_1 B = O_2 B - O_1 O_2,$$

a więc będzie

$$O_1 B < O_2 B$$

czyli

$$O_1 B < r_2$$

i tem bardziej

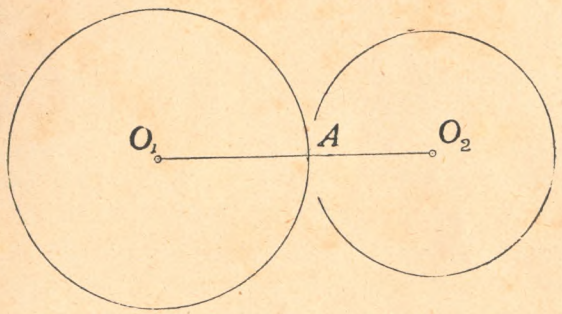
$$O_1 B < r_1,$$

a to dowodzić będzie, że punkt B leży wewnątrz większego okręgu.

Wniosek. Wspólne punkty dwu przecinających się okręgów są symetrycznie do siebie położone względem linji środków.

170. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków dwu okręgów jest równa sumie ich promieni, okręgi mają tylko jeden punkt wspólny.

Mamy teraz $O_1 O_2 = r_1 + r_2$ (rys. 124).



Rys. 124.

Jeżeli punkt przecięcia linji środków z 1-ym okręgiem nazwiemy A, to $r_1 = O_1 A$, a zatem $r_2 = A O_2$.

Okręgi mają więc jeden punkt wspólny A.

Ponieważ odcinek $O_1 A = r_1$ jest najmniejszy z odcinków, jakie można poprowadzić z punktu O_1 do 2-go okręgu, więc wszystkie inne punkty 2-go okręgu leżą od O_1 w odległości większej niż r_1 czyli leżą zewnątrz 1-go okręgu.

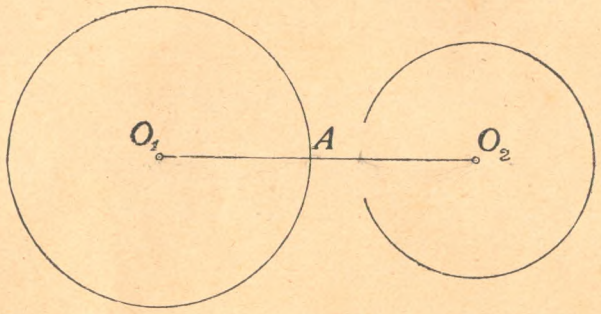
Okręgi są wtedy styczne do siebie i styczność nazywamy zewnętrzną.

Wniosek. Wspólny punkt dwu zewnętrznie do siebie stycznych okręgów leży na linji środków.

171. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków dwu okręgów jest większa od sumy ich promieni, okręgi nie mają punktów wspólnych i jeden leży całkowicie zewnątrz drugiego.

Jeżeli $O_1 O_2 > r_1 + r_2$, to łącząc środki tych kół, otrzymamy w przecięciu z 1-ym okręgiem punkt A, czyli będzie $O_1 A = r_1$ (rys. 125).

Ponieważ $O_1 O_2 > r_1 + r_2$ czyli $O_1 O_2 > O_1 A + r_2$, więc będzie $AO_2 > r_2$ (po odjęciu $O_1 A$), a stąd wynika, że punkt A leży zewnątrz drugiego koła. A że odcinek $O_2 A$ jest najmniejszy z odcinków, jakie można poprowadzić z punktu O_2 do 1-go okręgu i $O_2 A > r_2$, więc wszystkie punkty drugiego okręgu leżą zewnątrz 1-go.



Rys. 125.

172. Z poprzednich twierdzeń widzimy, że dwa niespółśrodkowe okręgi mogą być względem siebie w pięciorakiem położeniu zależnie od odległości ich środków:

1) $O_1 O_2 < r_1 - r_2$; 2) $O_1 O_2 = r_1 - r_2$; 3) $r_1 - r_2 < O_1 O_2 < r_1 + r_2$; 4) $O_1 O_2 = r_1 + r_2$ i 5) $O_1 O_2 > r_1 + r_2$.

Twierdzenia odwrotne są oczywiste.

§ 28. O zadaniach konstrukcyjnych.

173. **Uwagi ogólne.** Poznane przez nas dotychczas konstrukcje podstawowe, do których zaliczamy zadania o podziale odcinka lub kąta na połowy, o budowie kąta równego danemu, o budowie trójkątów z trzech elementów danych, o prowadzeniu równoległej i prostopadłej i t. p., pozwalają przy pomocy zdobytych już wiadomości na zastosowanie ich do konstrukcyj o charakterze nieco więcej skomplikowanym.

Ogólnego sposobu rozwiązywania takich zadań oczywiście podać nie można: wiele znaczy tu wprawa, nabyta przez praktykę i własna spostrzegawczość.

Najczęściej w zadaniach takich chodzi o znalezienie pewnego punktu, o wykreślenie prostej, okręgu. Jeżeli więc chodzić będzie

o punkt (jak to bywa bardzo często w zadaniach o budowie trójkąta), pamiętać należy, że będzie on wyznaczony, jeżeli potrafimy wykreślić dwie linje, czyli dwa miejsca geometryczne, których przecięciem ma być poszukiwany punkt. Jeżeli chodzi o prostą, musimy znaleźć dwa punkty, przez które ona ma przechodzić; koło będzie wyznaczone, jeżeli znajdziemy jego środek i promień i t. p.

Wogóle w rozwiązywaniu zadania konstrukcyjnego należy rozróżniać następujące cztery momenty:

1) Przypuszczając, że zadanie zostało rozwiązane, kreślimy odręcznie figurę, która mniej więcej odpowiada postawionym warunkom. Następnie, zestawiając uważnie dane elementy tej figury z poszukiwanemi, staramy się wykryć sposób jej wykreślenia, albo dzieląc figurę na części (przez prowadzenie pewnej prostej lub okręgu), albo zastępując inną, którą wykreślić potrafimy, albo w razie potrzeby przechodzimy jeszcze do innej konstrukcji, która jako podstawowa jest już nam znana i trudności nie nastręcza.

Na tem postępowaniu polega właśnie wykrycie sposobu rozwiązania; jest to tak zw. a n a l i z a, polegająca na rozkładaniu zadania na pomocnicze części czyli na zastępowaniu go innemi zadaniami, dopóki nie dojdzie się do konstrukcji podstawowej.

2) Dokonawszy analizy, która, jak widzimy, stanowi najważniejszą część rozwiązania, przechodzimy już do k o n s t r u k c j i, odwracając kolejność czynności pośrednich i dochodząc w końcu do konstrukcji żądanej.

3) Następnie należy jeszcze sprawdzić czyli u d o w o d n i ć, że otrzymana figura jest istotnie tą, o którą chodziło w zadaniu.

4) Wreszcie przeprowadzamy d y s k u s j ę zadania, rozważając dokładnie, jaki jest warunek możliwości rozwiązania i ile może być rozwiązań danego zadania.

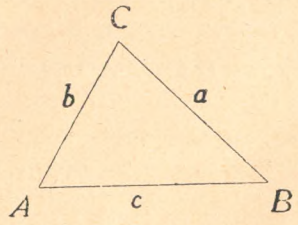
W zadaniach mało skomplikowanych sposób k o n s t r u k c j i sam jakgdyby rzuca się w oczy, wtedy analizę pomijamy.

Dowód najczęściej wynika wprost z konstrukcji, natomiast dyskusji nigdy pomijać nie należy.

Weźmy dla przykładu znane już zadanie o budowie trójkąta z trzech odcinków danych: a, b i c.

Postępując według wskazówek dopiero co podanych, wykreślamy odręcznie trójkąt ABC (rys. 126), w którym podstawa AB ma być równa odcinkowi c, bok $AC = b$ i bok $BC = a$. Widzimy, że odmierzając na dowolnej prostej odcinek $AB = c$, mamy już dwa wierzchołki trójkąta żądanego, chodzi więc o położenie trzeciego wierzchołka.

Z naszkicowanej figury widać, że odległość punktu C od A jest znana, równa odcinkowi b, a zatem ten punkt musi leżeć na miejscu geometrycznem punktów, znajdujących się od A w odległości b, więc będzie leżał na okręgu, zakreślonym z punktu A promieniem b.



Rys. 126.

Z drugiej strony punkt C leży na miejscu geometrycznem punktów, znajdujących się w odległości a od B, a więc na okręgu, opisanym z punktu B promieniem a.

Stąd już wynika, że położenie punktu C jest wyznaczone, jako punktu przecięcia się 2-ch okręgów.

W ten sposób przeprowadziliśmy *analizę* zadania.

Konstrukcja wynika już wprost z analizy.

Dowód, że $\triangle ABC$ jest żądany, wynika stąd, że jego boki są odpowiednio równe odcinkom: a, b i c.

Dyskusja. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do możliwości rozwiązania będzie ten, żeby dwa okręgi, o których mówiliśmy, przecięły się z sobą, a więc

$$a - b < c < a + b.$$

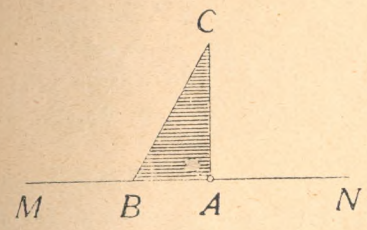
Okręgi przecinają się z sobą wogóle w dwu punktach, więc powinny być dwa rozwiązania, widzimy jednak, że one będą do siebie symetryczne, mianowicie będą to dwa trójkąty położone z obu stron AB. Zwykle, jeżeli mowa o trójkącie, chodzi o figurę położoną z jednej (zgóry umówionej) strony prostej, mówimy więc, że będzie tu jedno rozwiązanie.

174. Wogóle rozwiązanie zadania geometrycznego będzie polegało na wykreśleniu pewnej skończonej liczby prostych i okręgów. Konstrukcja taka nosi nazwę *Platońskiej* na cześć znakomitego myśliciela starożytnego *Platona* (427—348 r. przed nar. Chr.).

W praktyce do wykonywania najprostszych konstrukcyj posługujemy się linjałem, cyrklem i poniekąd ekierką. Należy jednak pamiętać, że konstrukcja praktyczna, jako zależna od dokładności narzędzi i od sprawności, nie może rościć pretensyj do ścisłości, którą dać może tylko rozumowanie. Ekierka służy zwykle do praktycznego wykreślania prostopadłej. Np. chcąc wykreślić prosto-

Biblioteka Politechniki Śląskiej

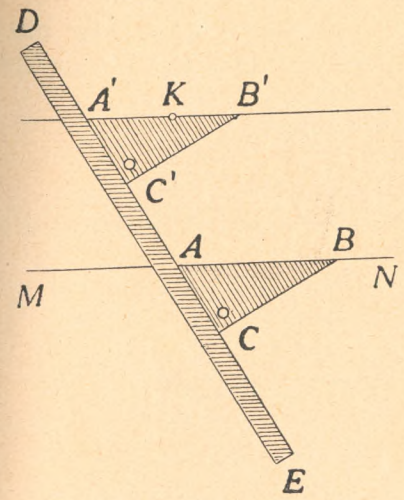
padłą do MN (rys. 127) w punkcie A, przystawiamy ekierkę do prostej danej bokiem BA, wtedy drugi bok AC da kierunek prostopadły do MN.



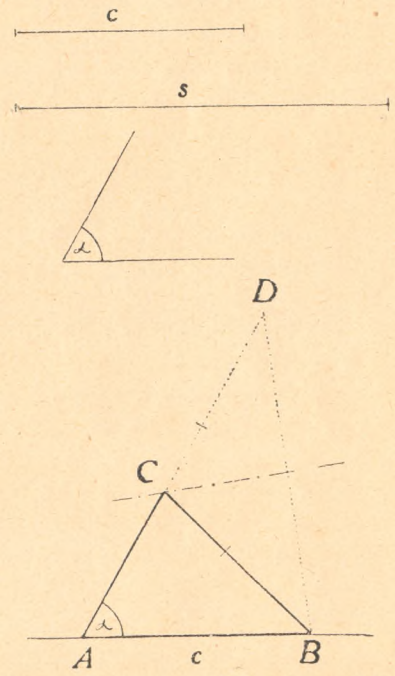
Rys. 127.

Jeżeli pragniemy przez punkt K (rys. 128) poprowadzić równoległą do MN, przystawiamy ekierkę ABC bokiem AB do proste MN, a do boku AC (albo CB) przykładamy linjał DE. Posuwając ekierkę po brzegu nieruchomego linjału, aż bok AB spotka punkt K, otrzymamy takie położenie ekierki $A'B'C'$, iż $A'B'$ będzie równoległe do AB.

Jako przykłady na zastosowanie podanych poprzednio ogólnych uwag, rozwiążemy następujące zadania:



Rys. 128.



Rys. 129.

175. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając podstawę, kąt do niej przyległy i sumę pozostałych dwu boków.

Dane są dwa odcinki: c, jako podstawa, s równe sumie boków $a + b$, oraz kąt α przyległy do podstawy (rys. 129).

Analiza. Przypuśćmy, że zadanie rozwiązano i żądanym trójkątem jest ABC, w którym podstawa $AB = c$, kąt A przyległy do niej $= \alpha$. Badając tę figurę, widzimy, że wprost nie będzie można upatrzeć zależności między danemi elementami c, s, α, dopóki nie mamy na rysunku odcinka s.

Przedłużmy zatem bok AC i odmierzmy $CD = BC$, wtedy $AD = AC + CB = s$. Jeżeli teraz połączymy z sobą punkty D i B, otrzymamy trójkąt ADB, w którym będą znane dwa boki i kąt między niemi zawarty, a więc wykreślić go potrafimy.

Jakże teraz przejść do trójkąta żądanego?

Chodzić tu będzie o znalezienie położenia wierzchołka C, który będzie zadośćczynił dwu warunkom:

1) będzie leżał na miejscu geometrycznem punktów równo oddalonych od punktów B i D,

2) na prostej AD.

A zatem wierzchołek C jest wyznaczony. Dzięki analizie zadanie sprowadziliśmy do 2-ch konstrukcyj podstawowych:

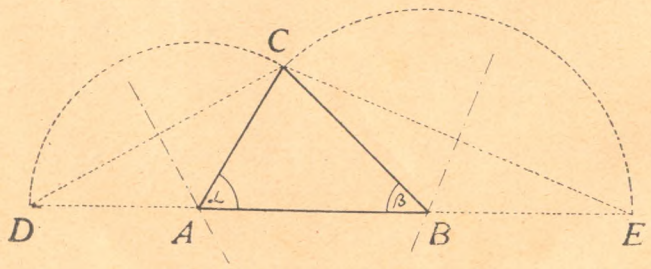
a) zbudować trójkąt, mając dwa boki i kąt między niemi,

b) wykreślić miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od 2-ch punktów danych.

Konstrukcja jest już widoczna z analizy.

Przeprowadzić dowód i dyskusję!

176. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając jego obwód i dwa kąty.



Rys. 130.

Analiza. Przypuśćmy, że $\triangle ABC$ (rys. 130) jest żądany; przedłużmy podstawę AB i odetnijmy $AD = AC$ i $BE = BC$; łącząc punkty D i E z punktem C, otrzymujemy trójkąt pomocniczy DCE, który wykreślić możemy, dlatego że jego podstawą jest $DE = AB + AC + BC$ czyli dany obwód trójkąta, $\sphericalangle D = \frac{1}{2}\alpha$ (dlaczego?) i $\sphericalangle E = \frac{1}{2}\beta$. Mając zaś $\triangle DCE$, łatwo już otrzymać wierzchołki A i B, dlatego że każdy z nich zadośćczyni dwu warunkom, leżąc:

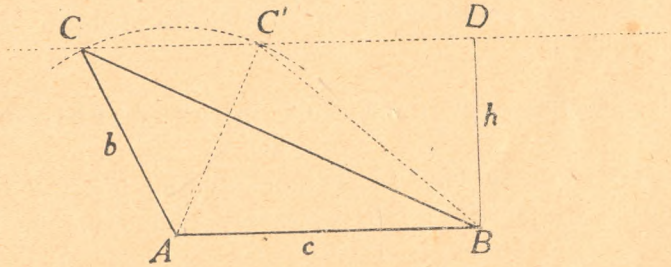
a) na prostej DE,

b) na osi symetrji boków DC i CE.

Stąd już konstrukcja oczywista. Podać dowód i dyskusję.

177. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając jego dwa boki i wysokość względem jednego z nich.

Analiza. Żądanym trójkątem niech będzie ABC (rys. 131), dane są boki AB i AC oraz wysokość h względem AB.



Rys. 131.

Wierzchołek C będzie zadośćczynił dwu warunkom:

a) będzie leżał w odległości h od podstawy,

b) w odległości b od punktu A.

A zatem będzie punktem przecięcia dwu linij, jako dwu miejsc geometrycznych (jakich?).

Przeprowadzić dyskusję!

178. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając jego dwa boki i środkową względem trzeciego boku.

Analiza. Przedłużyć środkową i odmierzyć odcinek równy jej długości; łącząc koniec tej podwojonej środkowej z jednym z końców podstawy, widzimy, że zadanie sprowadza się do konstrukcji

podstawowej: wykreślić trójkąt, mając jego trzy boki. Dalsza konstrukcja nie nastręcza trudności.

Jaki będzie warunek możliwości rozwiązania i ile będzie rozwiązań?

179. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając jego trzy środkowe.

Pamiętając, że środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który odcina od każdej z nich trzecią część (patrz 147), zadanie sprowadzamy do poprzedniego.

180. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając środki jego trzech boków.

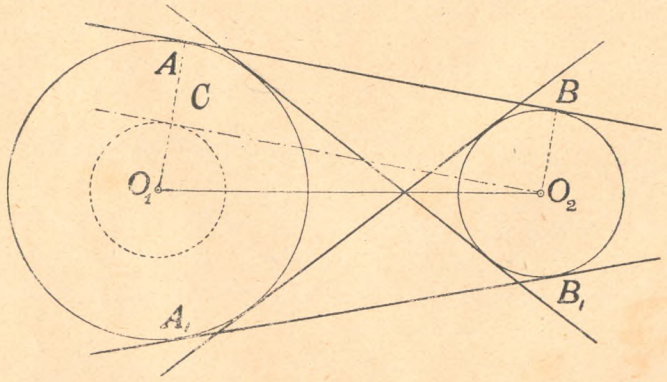
Rozwiązanie na zasadzie twierdzenia o odcinku, łączącym środki dwu boków trójkąta.

181. **Zadanie.** Promieniem danym opisać koło styczne do ramion kąta danego.

Środek koła będzie punktem przecięcia dwu miejsc geometrycznych (jakich?).

182. **Zadanie.** Do dwu kół poprowadzić wspólną styczną.

Analiza. Przypuśćmy, że żądaną styczną jest AB (rys. 132). Jeżeli punkty styczności A i B połączymy z odpowiedniemi środka-



Rys. 132.

mi kół, to otrzymamy promienie O_1A i O_2B do siebie równoległe. Odmierzmy na promieniu O_1A odcinek $AC = O_2B$ i poprowadźmy prostą CO_2, wtedy ta prosta będzie styczną do koła spółśrodkowego

z kołem O_1, wyprowadzoną z punktu O_2, a takie zadanie już rozwiązać potrafimy. Oczywiście otrzymamy jeszcze styczną A_1B_1 symetryczną do AB.

Oprócz tych dwu możemy otrzymać jeszcze dwie styczne (wewnętrzne), prowadząc naprzód styczną pomocniczą z punktu O_1 do koła spółśrodkowego z kołem O_2, opisanem promieniem równym sumie promieni kół danych.

Wykonać konstrukcję i wykazać w dyskusji, że zadanie może mieć cztery rozwiązania, trzy, dwa, jedno i wreszcie, kiedy jest nierozwiązalne.

§ 29. Ćwiczenia.

1. Podzielić łuk na połowy.
2. Dowieść, że styczna równoległa do cięciwy dzieli w punkcie styczności łuk odpowiadający tej cięciwie na połowy.
3. Dowieść, że łuki, zawarte między równoległemi cięciwami, są sobie równe.
4. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, stycznych do danej prostej w danym punkcie na niej?
5. Jakie jest miejsce środków kół stycznych do dwu równoległych prostych? do dwu przecinających się prostych?
6. Danym promieniem wykreślić koło styczne do dwu przecinających się prostych.
7. Wykreślić okrąg, przechodzący przez punkt dany i styczny do danej prostej w danym jej punkcie.
8. Jakie jest miejsce środków wszystkich równoległych do siebie cięciw w danem kole?
9. Jakie jest miejsce środków wszystkich równych sobie cięciw w danem kole?
10. Jakie jest położenie w kole prostej, przechodzącej przez punkt styczności i prostopadłej do danej stycznej?
11. Znaleźć miejsce punktów, których odległość od danego okręgu jest równa odcinkowi danemu.
12. Znaleźć miejsce geometryczne, na którem się znajdują końce wszystkich stycznych do koła danego, mających tę samą długość daną.
13. Jakie jest miejsce środków kół, opisanych promieniem danym i stycznych do koła danego?
14. Jakie jest miejsce środków kół, opisanych promieniem danym, które od danej prostej odcinają cięciwę długości danej?
15. Promieniem danym opisać koło styczne do dwu kół danych.
16. Promieniem danym opisać okrąg styczny do okręgu danego i przechodzący przez punkt dany.
17. Promieniem danym opisać koło, styczne do prostej danej, którego środek ma leżeć na drugiej danej prostej.
18. Promieniem danym opisać okrąg styczny do prostej danej i przechodzący przez dany punkt.

ale że ten trójkąt jest równoramienny:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B,$$

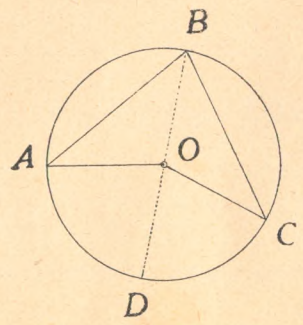
więc będzie

$$\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle B,$$

czyli

$$\sphericalangle B = \frac{\sphericalangle AOC}{2}.$$

2°. Środek koła leży wewnątrz kąta wpisanego (rys. 135). Połączmy punkty A i C ze środkiem koła i poprowadźmy przez punkt B średnicę BD. Wtedy otrzymamy dwa kąty wpisane: ABD i DBC takie, o jakich mówiliśmy poprzednio, więc



Rys. 135.

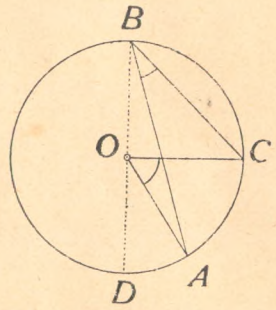
$$\sphericalangle ABD = \frac{\sphericalangle AOD}{2},$$

$$\sphericalangle DBC = \frac{\sphericalangle DOC}{2}.$$

A więc kąt ABC, jako suma $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC$, będzie równy:

$$\sphericalangle ABC = \frac{\sphericalangle AOC}{2}.$$

3°. Środek koła leży zewnątrz kąta wpisanego (rys. 136). Łącząc punkty A i C ze środkiem koła, mamy kąt środkowy AOC. Jeżeli znowu przez punkt B poprowadzimy średnicę BD, to otrzymamy dwa kąty wpisane: DBC i DBA, o jakich mówiliśmy w przypadku 1°, a zatem:



Rys. 136.

$$\sphericalangle DBC = \frac{\sphericalangle DOC}{2},$$

$$\sphericalangle DBA = \frac{\sphericalangle DOA}{2}.$$

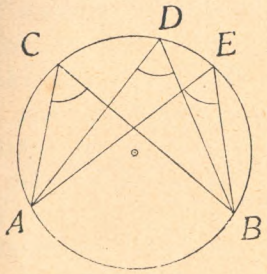
A więc kąt ABC, jako różnica $\sphericalangle DBC - \sphericalangle DBA$, będzie równy:

$$\sphericalangle ABC = \frac{\sphericalangle AOC}{2},$$ c. b. d. d.

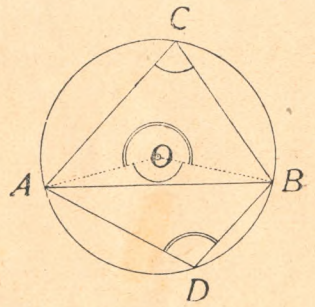
184. **Wniosek 1.** Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są sobie równe.

Np. kąty ACB, ADB, AEB (rys. 137) będą sobie równe dlatego, że każdy z nich jest równy połowie tego samego kąta środkowego.

Wniosek 2. Wykreślmy kąt wpisany, oparty na łuku AB (rys. 138), np. ACB i drugi kąt wpisany, oparty na ACB, czyli połączmy punkt D, położony na okręgu z przeciwnej strony cięciwy AB, niż punkt C, otrzymamy kąt ADB. Kąt ACB będzie równy połowie kąta środkowego AOB wypukłego, kąt ADB będzie równy połowie kąta środkowego AOB wklęsłego, a że suma kątów przy O, wypukłego i wklęsłego, tworzy kąt pełny, więc suma kątów wpisanych ACB i ADB tworzy kąt półpełny, czyli dwa kąty proste.



Rys. 137.

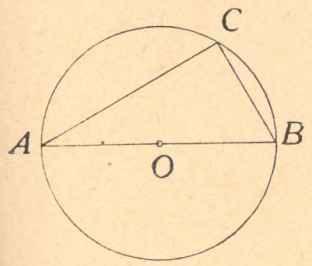


Rys. 138.

Stąd mamy następujący wniosek:

dwa kąty wpisane, mające wierzchołki z przeciwnych stron cięciwy, na której są oparte, spełniają się nawzajem do kąta półpełnego.

Wniosek 3. Poprowadźmy w kole średnicę AB (rys. 139), która, jak wiadomo, podzieli cały okrąg na dwa półokręgi: jeżeli teraz końce tej średnicy połączymy z jakimkolwiek punktem C, położonym na okręgu, otrzymamy kąt wpisany ACB, oparty na półokręgu, albo, jak się mówi, oparty na średnicy. Ponieważ kąt środkowy AOB, oparty na tym samym półokręgu, jest półpełny, więc kąt ACB, jako jego połowa, jest prosty. A więc:

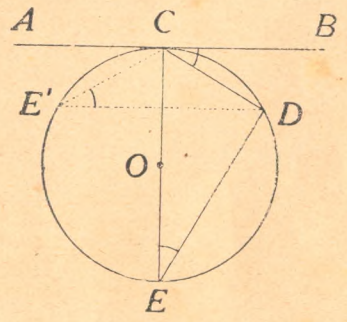


Rys. 139.

kąt wpisany, oparty na średnicy, jest prosty.

Uwaga. Twierdzenie, wypowiedziane w tym wniosku, przypisywane jest *Talesowi z Miletu.*

185. **Twierdzenie.** Kąt, utworzony przez styczną do koła i cięciwę, przechodzącą przez punkt styczności, jest równy kątowi wpisanemu, opartemu na tym samym łuku i położonemu z przeciwnej strony cięciwy.



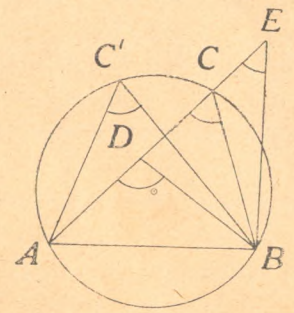
Rys. 140.

Przez punkt C okręgu (rys. 140) poprowadzona jest styczna AB i cięciwa CD, utworzył się kąt BCD.

Poprowadźmy przez punkt C średnicę CE i połączmy E i D, wtedy $\sphericalangle CED = \sphericalangle BCD$, dlatego że ich ramiona są odpowiednio prostopadłe: $CE \perp AB$, $ED \perp CD$ (na zasadzie poprzedniego wniosku). Kąt CED jest wpisany, oparty na łuku CD, równy mu będzie jakikolwiek inny kąt wpisany, oparty na tym samym łuku CD; twierdzenie udowodnione.

Uwaga. Styczna AB tworzy z cięciwą CD jeszcze jeden kąt, mianowicie ACD, który jest spełnieniem kąta BCD. Rzecz prosta, że kąt ACD będzie równy kątowi wpisanemu, mającemu wierzchołek na łuku CD pomiędzy C i D.

186. W danem kole poprowadźmy jakąkolwiek cięciwę AB (rys. 141) i szereg kątów wpisanych: ACB, $AC'B$ i t. d., opartych na łuku AB. Wiemy już, że wszystkie te kąty będą sobie równe.



Rys. 141.

Jeżeli wyobrazimy sobie, że w punkcie C lub C' znajduje się nasze oko, to powiadamy, że cięciwę AB widzimy z punktu C pod kątem ACB. Pod tym samym kątem widzimy cięciwę AB z każdego punktu, położonego na łuku $AC'CB$, który obejmuje każdy z tych kątów wpisanych.

Zachodzi teraz pytanie: jak się zmieni kąt widzenia odcinka AB, jeżeli nasze oko wyobrazimy sobie gdziekolwiek wewnątrz koła (ale z tej samej strony odcinka)?

Dla ułatwienia rozumowania obierzmy punkt wewnętrzny D, położony na ramieniu AC poprzedniego kąta. Odcinek AB widzimy teraz pod kątem ADB, który nie jest równy ACB, ale większy od niego (jako zewnętrzny w $\triangle DCB$).

Weźmy wreszcie teraz punkt E zewnątrz koła (ale z tej samej strony AB), z tego punktu odcinek AB widzimy pod kątem AEB, który, jak to łatwo spostrzec, będzie mniejszy od kąta ACB.

Stąd mamy:

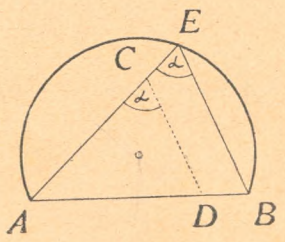
Twierdzenie. Kąt, pod którym cięciwa koła jest widziana z punktu, położonego wewnątrz albo zewnątrz koła, jest większy albo mniejszy od kąta wpisanego, opartego na tej cięciwie.

187. Na zasadzie powyższych twierdzeń mamy prawo powiedzieć, co następuje:

miejscem geometrycznem punktów, z których dany odcinek jest widziany pod tym samym kątem danym, jest łuk, który ten kąt obejmuje.

188. **Zadanie.** Wykreślić miejsce punktów, z których dany odcinek widać pod kątem danym.

Dany jest odcinek AB i kąt α (rys. 142). Znajdźmy jeden z punktów żądanego miejsca geometrycznego; w tym celu z punktu A wyprowadźmy dowolną półprostą i na niej przy pewnym punkcie C zbudujmy kąt $ACD = \alpha$. Jeżeli teraz z punktu B wyprowadzimy równoległą do DC, to jej przecięcie z półprostą AC da punkt E, który będzie jednym z żądanych, dlatego że $\sphericalangle AEB = \alpha$.



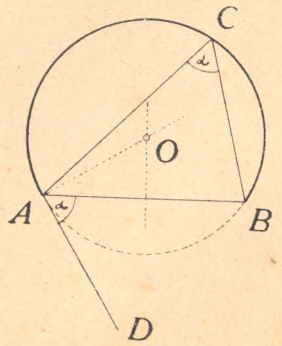
Rys. 142.

Aby znaleźć wszystkie punkty żądanego miejsca, należy przez A, E i B poprowadzić okrąg, wtedy łuk AEB będzie tem miejscem.

Inny sposób rozwiązania danego zadania jest następujący:

Na odcinku AB (rys. 143) przy punkcie A budujemy kąt $BAD = \alpha$. Jeżeli poprowadzimy $AO \perp AD$ i wykreślimy oś symetrji

odcinka AB, to w przecięciu otrzymamy punkt O, który będzie środkiem poszukiwanego koła, promieniem będzie AO. Żądanem miejscem będzie łuk ACB dlatego, że $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAD = \alpha$.



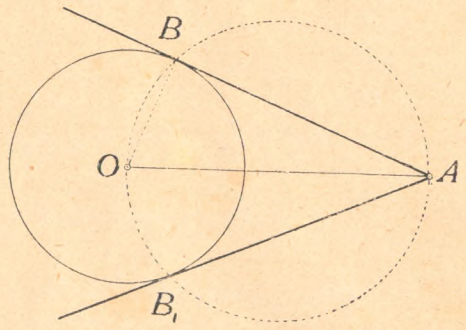
Rys. 143.

189. **Zadanie.** Poprowadzić styczną do danego koła z punktu, położonego zewnątrz tego koła.

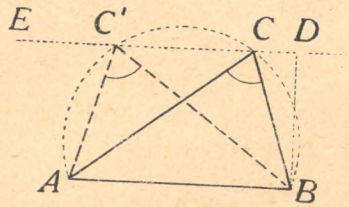
Zadanie już rozwiązywaliśmy poprzednio; podajemy tu inny sposób, oparty na następującem rozumowaniu:

Dane jest koło O i punkt zewnętrzny A (rys. 144). Przypuśćmy, że żądaną styczną jest AB, wtedy kąt OBA musi być prosty; jeżeli więc na OA, jako na średnicy, zbudujemy okrąg, to wierzchołek kąta OBA będzie leżał na tym okręgu, jako kąta prostego, opartego na średnicy.

Stąd już widoczna jest konstrukcja.



Rys. 144.



Rys. 145.

190. **Zadanie.** Zbudować trójkąt, mając podstawę, wysokość i kąt przeciwległy do podstawy.

Analiza. Dwa wierzchołki żądanego trójkąta są wiadome: A i B, chodzić będzie o trzeci (rys. 145). Wierzchołek ten zadośćczyni dwu warunkom:

1) leży na miejscu punktów, z których podstawę AB widać pod kątem danym,

2) leży na miejscu punktów, znajdujących się w odległości danej (równej wysokości trójkąta) od podstawy AB. Stąd już widoczna jest konstrukcja.

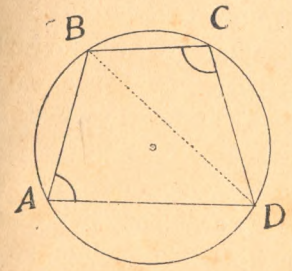
§ 31. Czworokąty wpisane i opisane.

191. Jeżeli na danym okręgu obierzemy cztery dowolne punkty A, B, C, D (rys. 146) i połączymy je kolejno, to otrzymamy czworokąt (wypukły) $ABCD$ wpisany w koło.

Twierdzenie. W czworokącie wpisanym w koło kąty przeciwległe spełniają się do kąta półpełnego.

Niech będzie dany czworokąt $ABCD$ (rys. 146) wpisany w koło. Zauważmy, że kąty A i C są wpisane oparte na tej samej cięciwie, ale położone z różnych jej stron, więc się spełniają (patrz 184, wniosek 2).

Oczywiście to samo dotyczyć będzie kątów B i D.



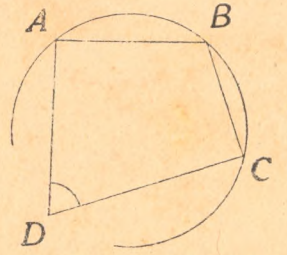
Rys. 146.

192. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli w czworokącie wypukłym kąty przeciwległe spełniają się, to na nim można opisać koło.

Dany jest czworokąt $ABCD$ (rys. 147), w którym

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 2d,$$

wtedy oczywiście i suma dwu pozostałych kątów będzie równa sumie dwu kątów prostych.



Rys. 147.

Przez trzy punkty A, B i C możemy poprowadzić okrąg, chodzi więc o to, czy on przejdzie przez czwarty wierzchołek D.

Przypuśćmy, że tak nie będzie, że mianowicie okrąg minie punkt D, który znajdzie się wewnątrz tego okręgu. Wtedy kąt D nie mógłby spełniać kąta B (patrz 184, wn. 2), co przeczyłoby założeniu.

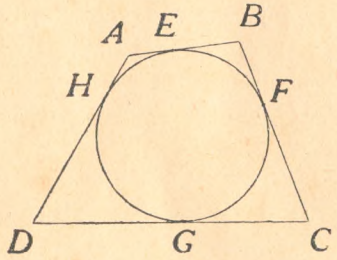
Gdyby punkt D znalazł się zewnątrz okręgu, przechodzącego przez wierzchołki A, B i C, to kąt D byłby mniejszy od spełnienia kąta B, co znowu przeczyłoby założeniu.

A więc okrąg, poprowadzony przez trzy wierzchołki A, B, C, musi przejść i przez czwarty wierzchołek D.

192. Z dowiedzionych twierdzeń wnioskujemy:

aby na czworokącie można było opisać okrąg, trzeba i wystarcza, żeby jego kąty przeciwległe spełniały się.

193. Jeżeli na okręgu weźmiemy cztery punkty i poprowadzimy przez nie styczne, to punkty przecięcia kolejnych stycznych będą wierzchołkami czworokąta opisanego na kole (rys. 148).



Rys. 148.

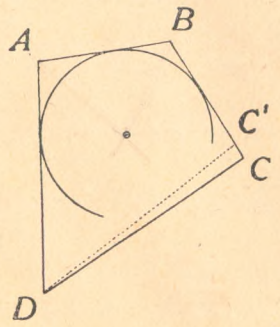
Twierdzenie. W czworokącie opisanym na kole sumy boków przeciwległych są sobie równe.

Pamiętając, że odcinki dwu stycznych, wyprowadzonych z danego punktu do koła, są sobie równe, więc $AE=AH$, $BE=BF$ i t. d., możemy napisać:

$$AB+DC=AE+EB+DG+GC=$$
$$=AH+BF+DH+FC=AD+BC,$$

c.b.d.d.

194. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli w czworokącie sumy boków przeciwległych są sobie równe, to w taki czworokąt można wpisać koło.



Rys. 149.

Niech będzie dany czworokąt $ABCD$ (rys. 149), w którym

$$AB+DC=AD+BC.$$

Zawsze możemy wykreślić koło styczne do trzech danych prostych: AD, AB i BC (jak to zrobić?). Chodzić będzie o to, czy wykreślone koło będzie również styczne do czwartego boku.

Przypuśćmy, że tak nie jest, że mianowicie bok DC znajdzie się zewnątrz wykreślonego koła. Wtedy moglibyśmy z punktu D poprowadzić znanym sposobem styczną do tego koła, niech ona przetnie się z bokiem BC w pewnym punkcie C', otrzymalibyśmy czworokąt $ABC'D$ opisany na kole, a więc musiałoby być

$$AB+DC'=AD+BC'.$$

Jeżeli otrzymaną równość porównamy z daną w założeniu:

$$AB+DC=AD+BC,$$

to musimy wywnioskować (przez odejmowanie stronami), że

$$DC-DC'=BC-BC',$$

czyli

$$DC-DC'=CC'.$$

Ale to jest niedorzeczność: w $\triangle DCC'$ różnica dwu boków nie może być równa trzeciemu bokowi.

Widzimy, że nasze przypuszczenie upada.

W taki sam sposób możemy się przekonać, że i inne przypuszczenie, mianowicie, że bok DC znalazłby się wewnątrz koła, również okaże się niemożliwe, więc koło rzeczone będzie styczne i do czwartego boku.

195. Z dowiedzionych ostatnich dwu twierdzeń wnioskujemy:

aby w czworokąt można było wpisać koło, trzeba i wystarcza, żeby sumy jego boków przeciwległych były sobie równe.

§ 32. Ćwiczenia.

1. Gdzie leży środek koła opisanego na trójkącie prostokątnym? ostrokątnym? rozwartokątnym?

2. Czy będą prawdziwe twierdzenia: jeżeli środek koła opisanego na trójkącie leży zewnątrz trójkąta, to trójkąt jest rozwartokątny?

Jeżeli leży wewnątrz, to trójkąt jest ostrokątny?

Jeżeli leży w środku jednego z boków, to trójkąt jest prostokątny?

3. Dowieść, że kąt, którego wierzchołek leży wewnątrz koła, jest równy sumie dwu kątów wpisanych, z których jeden jest oparty na łuku, zawartym między ramionami danego kąta, a drugi na łuku zawartym między ich przedłużeniami.

4. Dowieść, że kąt, którego wierzchołek leży poza kołem, ramionami zaś są dwie sieczne, jest równy różnicy dwu kątów wpisanych, z których każdy jest oparty na łuku, zawartym między ramionami danego kąta.

5. Jakie jest miejsce geometryczne wierzchołków trójkątów prostokątnych, wystawionych na tej samej przeciwprostokątnej?

6. Jakie jest miejsce geom. wierzchołków trójkątów o wspólnej podstawie i równym kącie przeciwległym?

(7—13). Zbudować trójkąt, mając:

7. dwa boki i wysokość względem trzeciego boku;
8. bok, kąt do niego przyległy i środkową względem tegoż boku;
9. podstawę i dwie wysokości względem pozostałych boków;
10. wysokość i dwa kąty przy podstawie;
11. podstawę, wysokość i jeden z kątów przy podstawie;
12. dwa boki i wysokość względem jednego z nich;
13. podstawę, wysokość i środkową względem podstawy.

14. Dowieść twierdzenia: jeżeli przez wspólny punkt dwu stycznych do siebie okręgów poprowadzimy dwie proste, przecinające jeden okrąg w punktach A i B, a drugi w punktach A_1 i B_1, to cięciwy AB i A_1B_1 będą do siebie równoległe.

Wziąć pod uwagę dwojaką styczność okręgów.

Wskazówka. Przez wspólny punkt poprowadzić styczną do okręgów danych.

15. Dane są dwa odcinki: a i b. Znaleźć na płaszczyźnie taki punkt, z którego obydwa odcinki widać pod tym samym kątem danym.

16. Dane są na płaszczyźnie trzy punkty: A, B i C. Znaleźć na tej płaszczyźnie czwarty punkt D taki, z którego odcinki AB i BC widać pod kątami danemi *).

17. Wykreślić trójkąt, mając promień koła wpisanego i dwa kąty.

18. Wykreślić trójkąt, mając promień koła na nim opisanego i 2 kąty.

19. Znaleźć punkt, z którego boki trójkąta widać pod takim samym kątem.

20. Czy na każdym równoległoboku można opisać koło?

21. Czy na każdym trapezie można opisać koło?

22. Czy w każdy równoległobok można wpisać koło?

23. Czy w trapez można wpisać koło?

24. W dany romb wpisać koło.

25. Na danym trójkącie opisano okrąg i z dowolnego punktu tego okręgu poprowadzono prostopadłe do boków trójkąta. Dowieść, że spodki wszystkich trzech prostopadłych leżą na jednej linji prostej.

Wskazówka. Zauważyć czworokąty, na których można opisać koło.

26. Dowieść, że dwusieczne kątów jakiegokolwiek czworokąta, przecinając się z sobą, tworzą nowy czworokąt, na którym da się opisać koło.

27. Na dwu bokach trójkąta wystawiono półokręgi. Dowieść, że one przecinają się na trzecim boku trójkąta.

---

*) Zadanie *Pothénot'a*, matematyka francuskiego z końca XVII wieku, mające ważne znaczenie w geometrji praktycznej.

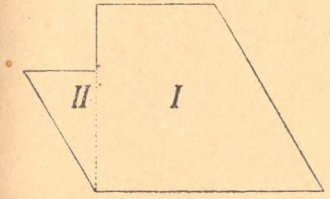
ROZDZIAŁ VI.

Równoważność wielokątów.

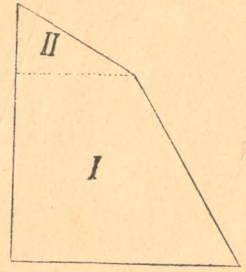
§ 33. Określenie wielokątów równoważnych. Zasadnicze własności związku równoważności. Postulat de Zolta.

196. **Określenia.** Dwa wielokąty, które mają nieprzerwaną część konturu wspólną i żadnego punktu wewnętrznego wspólnego, nazywamy przyległemi, np. wielokąty I i II (rys. 150).

Usuwając wspólną część konturu, otrzymujemy jeden wielokąt, który nazywa się sumą dwu wielokątów I i II.



Rys. 150.



Rys. 151.

Ale wielokąt II mogliśmy inaczej „dodać" do I-go, czyli inaczej mogliśmy go uczynić przyległym do I-go, budując na innym boku I-go wielokąt równy II-mu (rys. 151) i w ten sposób otrzymamy inną „sumę" danych wielokątów.

Widzimy więc, że istnieją wielokąty, które nie są sobie równe w dotychczasowem rozumieniu, dlatego że wogóle do siebie nie

przystają (może się zdarzyć, że jeden będzie miał więcej boków, niż drugi), ale są złożone z części odpowiednio sobie równych.

Takie wielokąty, w odróżnieniu od wielokątów przystających, nazywać będziemy r ó w n o w a ż n e m i.

Oczywiście możemy do jednego wielokąta dodać drugi, potem dodać trzeci i t. d. i w ten sposób otrzymać wielokąt równy sumie kilku wielokątów danych.

Wogóle możemy dać następujące **określenie:**

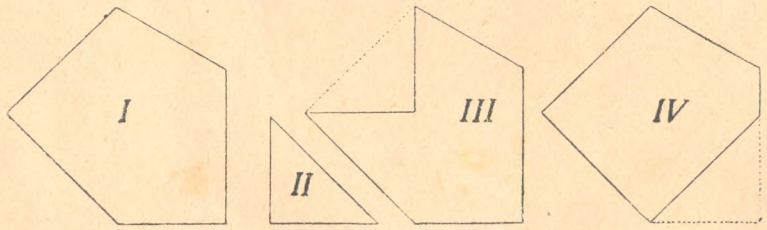
d w a w i e l o k ą t y n a z y w a j ą s i ę r ó w n o w a ż n e m i, j e ż e l i s i ę s k ł a d a j ą z c z ę ś c i o d p o w i e d n i o s o b i e r ó w n y c h.

Jako znaku równoważności używać będziemy $\sim$; jeżeli więc pragniemy wyrazić, że wielokąty M i N są równoważne, pisać będziemy $M \sim N$.

Z tego, co było powiedziane, widzimy, że pojęcie równoważności jest szersze, niż równości, więc dwa równe trójkąty są przez to samo równoważne, ale odwrotnie powiedzieć nie możemy.

197. Łatwo możemy sobie już wyrobić pojęcie o odejmowaniu wielokątów czyli o znajdowaniu ich r ó ż n i c y.

Aby np. znaleźć różnicę wielokątów I i II (rys. 152), musimy znaleźć taki wielokąt, który po dodaniu do II dałby wielokąt równy I. Wykreślić



Rys. 152.

taki wielokąt możemy bez trudności, budując na jednym z boków I-go wielokąt II w taki sposób, żeby miał wszystkie punkty wewnątrz I, a potem usuwając wspólną część konturu. Otrzymujemy wielokąt III lub IV; wogóle otrzymać je możemy sposobami rozmaitemi.

Jeżeli dla sumy wielokątów zachowaliśmy charakter jednoznaczności, to musimy to samo powiedzieć o różnicy, czyli musimy uznać wielokąty III i IV za r ó w n o w a ż n e. Wypowiemy więc następujące o k r e ś l e n i e:

d w a w i e l o k ą t y n a z y w a m y r ó w n o w a ż n e m i, j e ż e l i k a ż d y z n i c h j e s t r ó ż n i c ą d w u w i e l o k ą t ó w o d p o w i e d n i o s o b i e r ó w n y c h.

Zrodzić się może pytanie: czy równoważność, określona przez sumę wielokątów odpowiednio sobie równych, jest identyczna z równoważnością, określoną przez różnicę? czy te dwie definicje nie są z sobą sprzeczne?

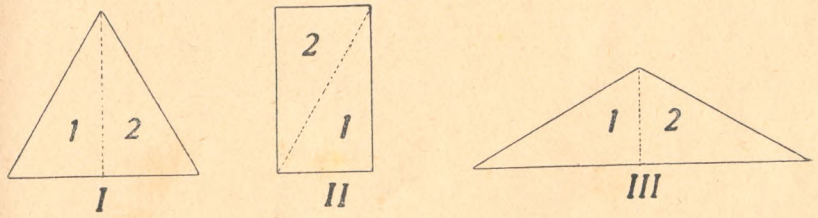
Otóż można udowodnić, że tak nie jest: obie definicje są równoznaczne, to znaczy, że jeżeli dwa wielokąty są równoważne jako sumy, to są równoważne, jako różnice wielokątów odpowiednio sobie równych. Dowód ten jednak przekracza ramy naszego wykładu, więc go pomijamy, poprzestając na stwierdzeniu równoznaczności obu definicyj w poszczególnych przypadkach, które niebawem rozpatrzymy.

198. **Wnioski.**

1) Nasuwa się przedewszystkiem pytanie, jak r o z p o z n a ć, c z y d a n e w i e l o k ą t y s ą r ó w n o w a ż n e.

Z określenia równoważności wynika odpowiedź: należy dane wielokąty, jako sumy, rozłożyć na części składowe parami sobie równe.

Tak np. aby się przekonać, czy wielokąty I, II i III (rys. 153) są równoważne, wystarczy w trójkącie I poprowadzić wysokość, wtedy widzimy, że każda z trzech danych figur składa się z części 1 i 2 odpowiednio sobie równych (trójkąt I był równoramienny).



Rys. 153.

Oczywiście, nie zawsze wystarczać będzie poprowadzenie jednego odcinka dla podzielenia wielokąta na odpowiednie części; niekiedy wypadnie ich wykreślić s i e ć, aby otrzymać części takie, które będą do siebie w obydwu danych wielokątach parami przystawały.

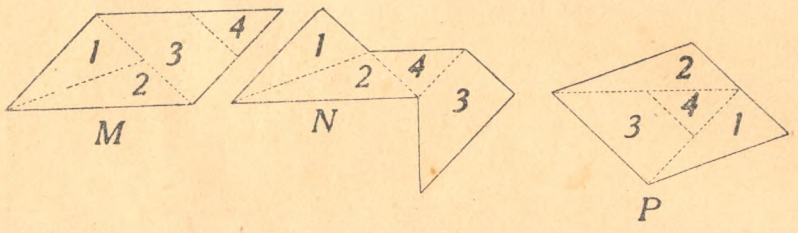
Wkrótce poznamy twierdzenia, które dają możność rozpoznawania równoważności niektórych wielokątów drogą uproszczoną.

Uwaga. Należy tu zauważyć, że mamy jeszcze inną drogę postępowania, którą wskazuje również określenie równoważności: potraktować dane wielokąty, jako różnice dwóch wielokątów parami sobie równych, to znaczy odnaleźć taki wielokąt, który po dodaniu do każdego z danych utworzy wielokąty równe. W pewnych przypadkach będziemy i ten sposób stosowali, naogół jednak można powiedzieć, że sprawdzanie równoważności przez dodawanie, czyli przez r o z k ł a d na części odpowiednio równe, jest prostszy.

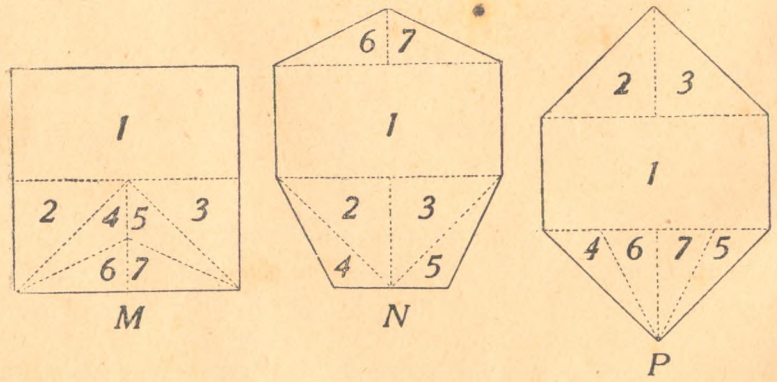
2) Z poprzednich rozumowań wynikać będzie:

d w a w i e l o k ą t y s ą r ó w n o w a ż n e, j e ż e l i s i ę s k ł a d a j ą z j e d n a k o w e j l i c z b y c z ę ś c i o d p o w i e d n i o r ó w n o w a ż n y c h.

3) Dzieląc dany wielokąt M (rys. 154) szeregiem odcinków na części, możemy zawsze utworzyć z nich, przez odpowiednie ugrupowanie, wielokąty N i P, równoważne z M. Z łatwością można się przekonać, że i te dwa powstałe wielokąty N i P będą sobie równoważne.



Rys. 154.



Rys. 155.

Dla wykazania równoważności wielokątów M i N wystarczy każdy z nich podzielić odcinkami na trzy części: $(1)+(2)$, (3) i (4). Dla wykazania równoważności M i P wystarczy również podzielić każdy z nich na 3 części: $(3)+(4)$, (1) i (2).

Jeżeli teraz chcemy sprawdzić równoważność N i P, należy każdy wielokąt podzielić na 4 części: *1*, *2*, *3* i *4*, na które można było odrazu podzielić wielokąt M.

Na rys. 155 podano trzy wielokąty M, N i P, które, jak to łatwo wykazać, są równoważne.

Wogóle możemy powiedzieć, że d w a w i e l o k ą t y, z k t ó r y c h k a ż d y z o s o b n a j e s t r ó w n o w a ż n y t r z e c i e m u, s ą s o b i e r ó w n o w a ż n e.

A więc, jeżeli

$$M \sim P$$

i

$$M \sim N,$$

to

$$N \sim P.$$

199. Z pojęcia sumy wynika wprost pojęcie nierówności; jeżeli więc mamy dwa takie wielokąty M i N, że pierwszy z nich jest sumą wielokąta N i jeszcze pewnego innego, to nazywamy wielokąt M w i ę k s z y m od N, przeciwnie: wielokąt N będzie m n i e j s z y od M i piszemy:

$$M > N,$$

przeciwnie

$$N < M.$$

Tu jednak może się zrodzić pewna wątpliwość. Chodzi mianowicie o to, że dla sprawdzenia równoważności dwu figur, dzielimy je na pewną skończoną liczbę takich części, któreby do siebie parami przystawały; innemi słowy, poprowadziwszy sieć odcinków w danym wielokącie, możemy przez odpowiednie ugrupowanie utworzyć wielokąt równoważny danemu. Czy nie można pomyśleć takiego ugrupowania, żeby odrzucając jedną z części, utworzyć figurę równoważną danemu wielokątowi?

Wątpliwość tę usuniemy, przyjmując za oczywistą następującą prawdę:

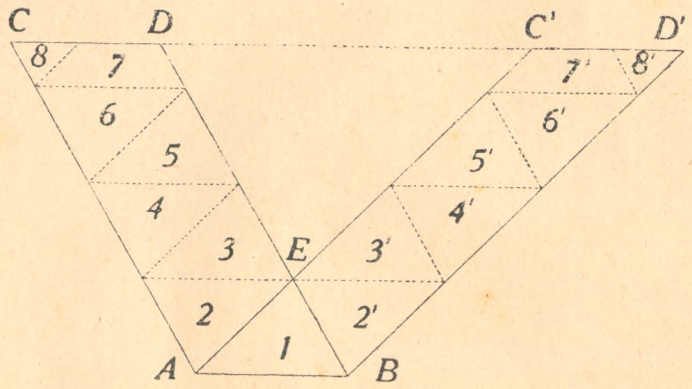
w i e l o k ą t n i g d y n i e m o ż e o k a z a ć s i ę r ó w n o w a ż n y s w o j e j c z ę ś c i.

Ta prawda nosi nazwę **postulatu de Zolta,** matematyka włoskiego z końca XIX wieku.

§ 34. Równoważność równoległoboków, trójkątów i trapezów.

200. **Twierdzenie.** Dwa równoległoboki o równych podstawach i wysokościach są równoważne.

Dla ułatwienia pomieśćmy obydwa równoległoboki na wspólnej podstawie AB (rys. 156), ich przeciwległe boki będą leżały na równoległej do podstawy.



Rys. 156.

Przez punkt E przecięcia się boków BD i AC' poprowadźmy w każdym równoległoboku równoległe do podstawy, a następnie z punktów przecięcia prowadzimy w każdym z nich odcinki równoległe do odpowiednich boków 2-go równoległoboku. W ten sposób na zasadzie pewnika Archimedesa (patrz 32) odcinkami BE i AE wyczerpiemy boki BD i AC', a więc siecią otrzymanych trójkątów wyczerpiemy obydwa równoległoboki (z których każdy został podzielony na 8 części).

Można z łatwością przekonać się, że dane równoległoboki składać się będą z jednakowej liczby części odpowiednio sobie równych, a zatem są równoważne.

Dowód 2-gi.

Aby wykreślić żądane równoległoboki, poprowadźmy dwie równoległe i weźmy na nich odcinki: $AB = A'B' = CD = C'D'$ (rys. 157).

Zauważmy dwa trapezy: $ACC'A'$ i $BDD'B'$, które są sobie równe, dlatego że mają:

$AA' = BB'$ $(= AB + BA' = BA' + A'B')$,

$CC' = DD'$ dla podobnej przyczyny,

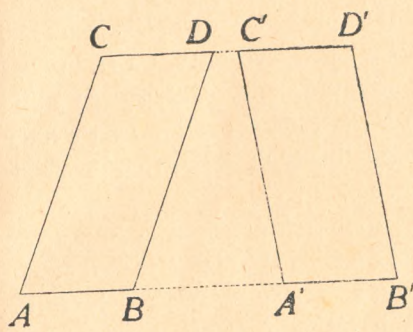
$AC = DB$ i $A'C' = D'B'$,

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA'$; $\sphericalangle AA'C' = \sphericalangle BB'D'$.

Trapezy te do siebie przystają: $ACC'A' = BDD'B'$.

Jeżeli teraz od tych równych trapezów odejmiemy trapez $BDC'A'$, to otrzymać powinniśmy figury równoważne, mianowicie:

$ABCD \sim A'B'C'D'$, c. b. d. d.



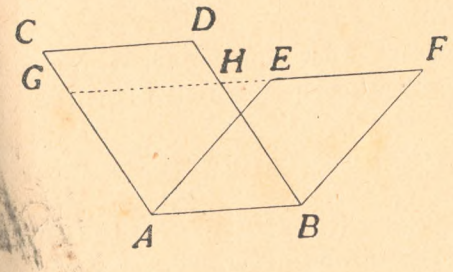
Rys. 157.

Uwaga. Przytoczony tu drugi sposób rozumowania jest sprawdzeniem równoważności przez *odejmowanie*, poprzedni zaś przez *dodawanie*; widzimy na tym przykładzie, że obie metody są równoznaczne (197).

Wniosek. Równoległobok jest równoważny prostokątowi o takiej samej podstawie i wysokości.

201. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli dwa równoważne równoległoboki mają podstawy równe, to i wysokości mają równe.

Dowód. Niech będą dane dwa równoległoboki: $ABDC$ i $ABFE$ (rys. 158) o wspólnej podstawie AB.



Rys. 158.

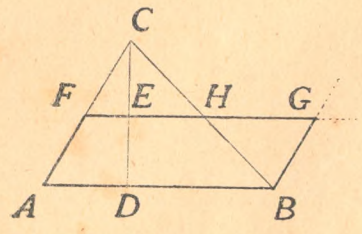
Przypuśćmy, że ich wysokości nie są sobie równe, mianowicie 1-szy z nich niech ma wysokość większą. W takim razie, przedłużając bok EF, przetniemy boki AC i BD odpowiednio w punktach G i H, dlatego że punkty C i D będą leżały z przeciwnej strony prostej EF, niż punkty A i B. Otrzymamy równoległobok $ABHG$ równoważny $ABFE$, ale $ABHG$ jest częścią $ABDC$, a zatem dwa dane równoległoboki nie mogłyby być sobie równoważne (na zasadzie postulatu de Zolta), a to przeczy założeniu.

Udowodniwszy powyższe twierdzenie, możemy powiedzieć, że będzie prawdziwe i następujące **twierdzenie:**

dwa równoległoboki o podstawach równych, ale wysokościach nierównych, nie mogą być sobie równoważne.

202. **Twierdzenie.** Trójkąt jest równoważny równoległobokowi o takiej samej podstawie, a wysokości dwa razy mniejszej.

Istotnie: w trójkącie ABC (rys. 159) przez środek E wysokości poprowadźmy $FG \parallel AB$, następnie $BG \parallel AC$. Trójkąty CFH i HBG będą sobie równe, dlatego że mają $CH = HB$ (dlaczego?) i po dwa kąty przyległe do tych boków, odpowiednio równe.



Rys. 159.

Widzimy wprost z rysunku, że trójkąt $ACB = AFHB + FCH$, równoległobok $ABGF = AFHB + HGB$, a że $\triangle FCH = \triangle HGB$, więc trójkąt ACB i równoległobok $AFGB$ są równoważne, jako złożone z części odpowiednio sobie równych.

Uwaga. Łatwo przytoczyć dowód przez odejmowanie: jeżeli od figury $ACHGB$ odejmiemy trójkąt HGB, otrzymamy ABC, jeżeli zaś od tej samej figury odejmiemy FCH, otrzymamy równoległobok $AFGB$, więc różnice będą równoważne.

W taki sam sposób można dowieść, że trójkąt jest równoważny równoległobokowi o takiej samej wysokości, a podstawie dwa razy mniejszej.

203. **Wnioski.** 1) Trójkąt jest równoważny prostokątowi o takiej samej podstawie, a wysokości dwa razy mniejszej.

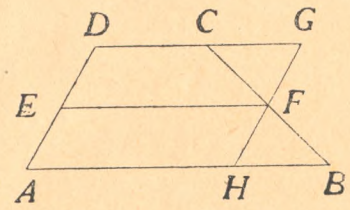
2) Dwa trójkąty o równych podstawach i wysokościach są równoważne.

3) Dwa równoważne trójkąty o równej podstawie mają wysokości równe (albo dwa równoważne trójkąty o równej wysokości mają podstawy równe).

4) Miejscem geometrycznem wierzchołków równoważnych trójkątów o wspólnej podstawie jest równoległa do podstawy, poprowadzona przez wierzchołek trójkąta.

204. **Twierdzenie.** Trapez jest równoważny równoległobokowi, który za wysokość ma wysokość trapezu, a za podstawę linję środkową trapezu.

Dany jest trapez $ABCD$ (rys. 160), poprowadźmy w nim linję środkową EF, następnie $GH \parallel AD$; otrzymamy równoległobok $ADGH$, którego podstawa $AH = EF$, a wysokość jest równa wysokości trapezu.



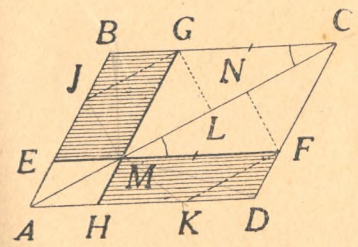
Rys. 160.

Zauważmy naprzód, że trójkąty CGF i HFB są sobie równe; jeżeli teraz do figury $ADCFH$ dodamy $\triangle HFB$, otrzymamy trapez $ABCD$, jeżeli zaś dodamy $\triangle CGF$, otrzymamy równoległobok $AHGD$. Ponieważ wspomniane trójkąty są sobie równe, więc otrzymane sumy będą równoważne.

Uwaga. Dowód przez odejmowanie jest oczywisty.

205. **Twierdzenie.** Jeżeli przez dowolny punkt przekątnej równoległoboku poprowadzimy równoległe do jego boków, to otrzymamy dwa równoważne równoległoboki, położone z przeciwnych stron przekątnej.

Na przekątnej AC danego równoległoboku (rys. 161) weźmy dowolny punkt M i poprowadźmy $GH \parallel AB$ i $EF \parallel AD$, otrzymamy dwa równoległoboki $MEBG$ i $MFDH$, które powinny być równoważne.



Rys. 161.

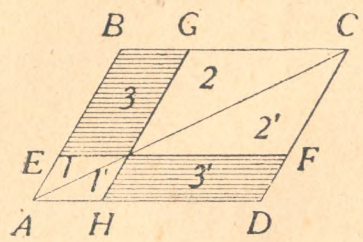
Istotnie: poprowadźmy $GI \parallel FK \parallel AC$, wtedy

$$\begin{matrix} \text{równ-bok } (MB) \sim \text{równ. } (MI) \\ \text{równ. } (MD) \sim \text{równ. } (MK). \end{matrix}$$

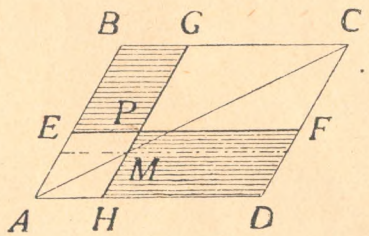
Ale równoległoboki (MI) i (MK) mają wspólną podstawę AM, wysokości zaś równe: $GL = FN$ (co wynika z równości trójkątów prostokątnych GCL i MNF), a więc są równoważne, a zatem są równoważne także równ. (MB) i równ. (MD), o co właśnie chodziło.

Dowód 2-gi. Trójkąty ABC i ACD (rys. 162) są sobie równe; odejmując od jednego z nich trójkąty 1′ i 2′, odpowiednio równe 1 i 2, otrzymamy różnice równoważne, czyli $3 \sim 3'$.

Równoległoboki, o których mówiliśmy w twierdzeniu, noszą nazwę d o p e ł n i a j ą c y c h.



Rys. 162.

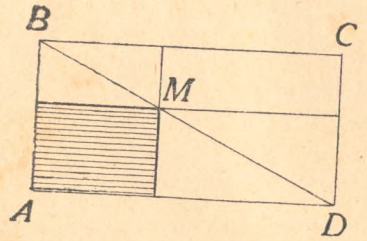


Rys. 163.

206. Jeżeli punkt, przez który w poprzedniem twierdzeniu prowadziliśmy równoległe do boków równoległoboku, nie jest położony na przekątnej, np. punkt P (rys. 163), to wtedy równoległoboki (PB) i (PD) nie będą równoważne, dlatego że 1-szy będzie mniejszy od (MB), drugi zaś większy od (MD).

Mamy więc twierdzenie przeciwne względem poprzedniego, a zatem będzie prawdziwe twierdzenie odwrotne względem niego (jak je sformułować?).

Uwaga. Jeżeli na rysunku 161 usuniemy równoległobok $MGCF$, to otrzymamy figurę sześciokątną $ABGMFD$, która od czasów Euklidesa nosi nazwę g n o m o n u i twierdzenie ostatnie nazywają niekiedy t w i e r d z e n i e m o g n o m o n i e.



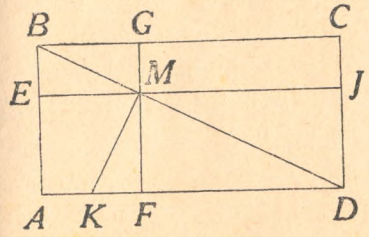
Rys. 164.

Ściśle mówiąc, gnomonem nazywano w starożytności przyrząd do wykreślania kąta prostego; kształt jego otrzymamy, biorąc na poprzednim rysunku zamiast równoległoboku $ABCD$ prostokąt i usuwając część $MGCF$.

Jeżeli dany równoległobok jest prostokątem, to i dopełniające równoległoboki będą prostokątami (rys. 164); można przytem znaleźć takie położenie punktu M na przekątnej, że

jeden z dopełniających równoległoboków będzie kwadratem. Jak tego dokonać?

207. Niech będzie dany prostokąt $ABCD$ (rys. 165), dobierzmy na jego przekątnej taki punkt M, aby otrzymać, jako dopełniające równoległoboki: kwadrat $AEMF$ i prostokąt $MGCI$.



Rys. 165.

Poprowadźmy $MK \perp BD$, wtedy otrzymamy trójkąt prostokątny KMD, w którym KF jest rzutem przyprostokątnej KM na przeciwprostokątną KD. Zauważmy, że trójkąty prostokątne EBM i KMF są sobie równe (dlaczego?), a więc

$$KF = EB = GM = CJ.$$

Z twierdzenia o gnomonie wiemy, że kwadrat $AEMF$ jest równoważny prostokątowi $MGCI$; kwadrat ten ma bok $= MF$ czyli wysokości trójkąta KMD, a prostokąt ma za podstawę $MJ = FD$ czyli rzut boku MD na KD, za wysokość zaś $MG = EB = KF$, czyli rzut boku KM na KD. Stąd mamy następujące **twierdzenie:**

w t r ó j k ą c i e p r o s t o k ą t n y m k w a d r a t, z b u d o w a n y n a w y s o k o ś c i, s p u s z c z o n e j z w i e r z c h o ł k a k ą t a p r o s t e g o, j e s t r ó w n o w a ż n y p r o s t o k ą t o w i, z b u d o w a n e m u z o d c i n k ó w, n a k t ó r e t a w y s o k o ś ć p o d z i e l i ł a p r z e c i w p r o s t o k ą t n ą.

Twierdzenie to znane jest pod nazwą t w i e r d z e n i a E u k l i d e s a o wysokości trójkąta prostokątnego.

§ 35. Zadania konstrukcyjne.

208. Twierdzenia, które poznaliśmy w poprzednim §, łącznie z twierdzeniem o gnomonie, mają częste zastosowania w zadaniach konstrukcyjnych, dotyczących zamiany figur oraz podziału ich na równoważne części.

Zamiana figury polega na wykreśleniu figury innego kształtu, ale równoważnej danej. Niektóre z tych zadań rozwiązuje się łatwo na mocy twierdzeń o równoważności równoległoboków i trójkątów, inne na zasadzie twierdzenia o gnomonie.

Zadanie 1. Dany równoległobok zamienić na inny równoważny mu o tej samej podstawie i wysokości oraz o danym kącie przy podstawie.

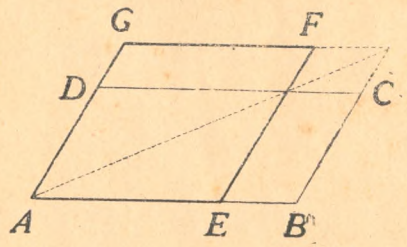
Rozwiązanie widoczne jest z twierdzenia ustępu 200.

Zadanie 2. Równoległobok zamienić na równoważny mu prostokąt o takiej samej podstawie i wysokości.

Zadanie 3. Dany równoległobok zamienić na inny równoważny mu równoległobok, któryby za jeden z boków miał odcinek dany, a kąty miał te same.

Rozwiązuje się łatwo przez zastosowanie gnomonu.

Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 166), niech danym odcinkiem będzie AE, wtedy żądanym równoległobokiem będzie $AEFG$. Konstrukcja gnomonu jest widoczna z rysunku.



Rys. 166.

W podobny sposób rozwiązuje się zadanie w tym przypadku, kiedy podstawa żądanego równoległoboku ma być większa, niż danego.

Zadanie 4. Równoległobok zamienić na równoważny mu romb o tej samej podstawie i wysokości.

Zadanie 5. Równoległobok zamienić na równoważny mu romb o boku danym.

Zadanie 6. Równoległobok zamienić na równoważny mu prostokąt o podstawie danej.

Rozwiązuje się na zasadzie zadania 3.

Zadanie 7. Kwadrat zamienić na równoważny mu równoległobok o boku równym odcinkowi danemu: a) większemu od boku kwadratu, b) mniejszemu od niego.

Zadanie 8. Trójkąt zamienić na równoważny mu trójkąt równoramienny o tej samej podstawie.

Zadanie 9. Trójkąt zamienić na równoważny mu trójkąt o tej samej wysokości, ale któryby miał:

a) kąt przy podstawie dany,

b) bok dany.

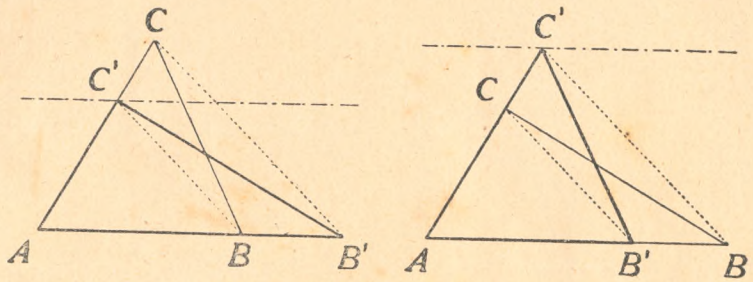
Zadanie 10. Trójkąt zamienić na równoważny mu równoległobok:

a) o tej samej wysokości i danym kącie przy podstawie,

b) o tej samej podstawie i kącie przy niej.

Zadanie 11. Trójkąt zamienić na równoważny mu inny trójkąt, któryby za podstawę miał odcinek dany.

Rozróżniamy tu na rysunku dwa przypadki, kiedy dany odcinek jest: a) większy od podstawy trójkąta, b) mniejszy od niej.



Rys. 167.

Dany jest $\triangle ABC$ (rys. 167), podstawą żądanego trójkąta ma być AB'. Jeżeli punkt B' połączymy z C, a przez B poprowadzimy równoległą do $B'C$, to w przecięciu z AC otrzymamy punkt C'. Trójkąt $AB'C'$ jest jednym z żądanych.

Istotnie: trójkąty $BC'B'$ i $BC'C$ są równoważne, dlatego że mają podstawę BC' wspólną i $B'C \parallel BC'$, więc jeżeli do ABC' dodamy jed[illegible] z trójkątów, otrzymamy trójkąt dany ABC, dodając drugi, otrzymamy $AB'C'$, więc $\triangle ABC$ jest równoważny $AB'C'$, który będzie jednym z żądanych.

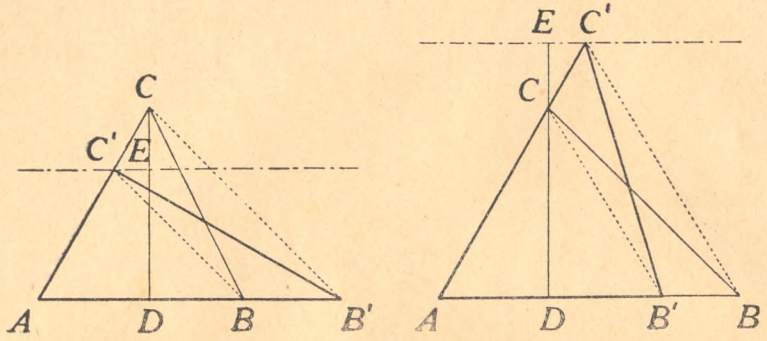
Zadanie będzie nieoznaczone dopóty, dopóki nie dano jeszcze jednego warunku, wyznaczającego trójkąt żądany. Miejscem geometrycznem wierzchołków tych trójkątów będzie równoległa do podstawy AB, poprowadzona przez punkt C'.

Uwaga. Zadanie można było rozwiązać przez zastosowanie gnomonu, uzupełniając dany trójkąt do równoległoboku.

Zadanie 12. Trójkąt zamienić na równoważny mu inny trójkąt, któryby za wysokość miał odcinek dany.

Znowu na rysunku rozróżniono dwa przypadki: a) dany odcinek jest mniejszy od wysokości danego trójkąta, b) jest od niej większy.

Wysokością żądanego trójkąta ma być odcinek DE. Konstrukcja, jak w poprzedniem zadaniu, widoczna jest z rysunku 168.

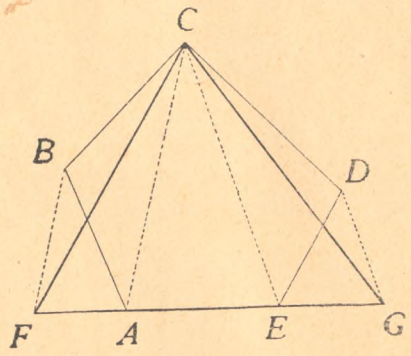


Rys. 168.

Tę samą uwagę należy zrobić i tu, że zadanie jest nieoznaczone i żądanym trójkątem będzie każdy, który ma za podstawę AB' a wierzchołek na równoległej do podstawy, poprowadzonej przez C'.

Zadanie 13. Wielokąt zamienić na równoważny mu trójkąt.

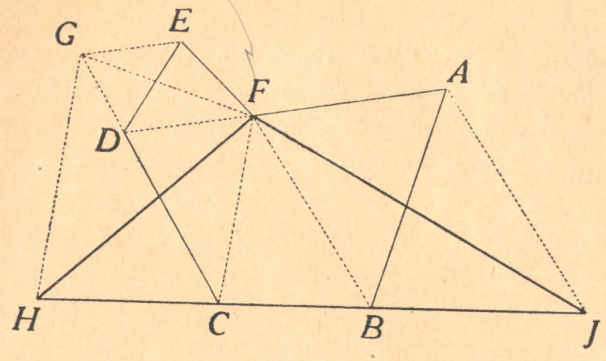
1°. Weźmy naprzód wielokąt wypukły $ABCDE$ (rys. 169). Poprowadźmy przekątną CA, następnie wierzchołek B przenieśmy na przedłużenie podstawy AE po równoległej do tej przekątnej, wtedy zamiast trójkąta ABC, będziemy mieli równoważny mu FCA.



Rys. 169.

Tego samego dokonawszy względem przekątnej CE, otrzymamy $\triangle FCG$ równoważny danemu pięciokątowi.

2°. Niech teraz będzie dany wielokąt wklęsły $ABCDEF$ (rys. 170). Łącząc wierzchołek F z D, możemy dany sześciokąt przekształcić na równoważny mu pięciokąt $ABCGF$. Łączymy potem wierzchołek F z C i otrzymujemy równoważny mu czworokąt $ABHF$, wreszcie trójkąt HFI.



Rys. 170.

Wniosek. Ponieważ trójkąt umiemy przekształcić na równoległobok o danej podstawie, więc mając dane dwa wielokąty M i N, możemy je przekształcić na równoległoboki o równej podstawie.

Wtedy zajść musi jeden z trzech następujących przypadków:

1) wysokości równoległoboków będą sobie równe, więc równoległoboki będą sobie równoważne (patrz 200), a co za tem idzie, będzie

$$M \sim N,$$

albo 2) wysokość 1-go równoległoboku będzie większa niż 2-go, wtedy będzie (patrz 201):

$$M > N,$$

albo 3) wysokość 1-go równoległoboku będzie mniejsza niż 2-go, wtedy

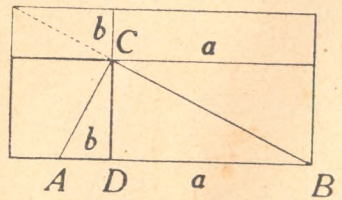
$$M < N.$$

Ponieważ pomiędzy wysokościami omawianych równoległoboków, jako odcinkami, zajść może tylko jedna z 3-ch z nawzajem wykluczających się zależności: są sobie równe, albo jedna z nich jest większa od drugiej, albo jest mniejsza od drugiej, więc i między wielokątami danemi M i N zachodzić musi tylko jeden związek, wyrażony przez jeden z 3-ch nawzajem wyłączających się znaków: $\sim$, $>$ i $<$.

Widzimy, że znak równoważności $\sim$ między wielokątami odgrywa taką samą rolę, jak znak równości między odcinkami. Niekiedy nawet używany bywa i dla równoważności figur znak $=$, pamiętać jednak należy, że taka równość figur nie jest jednoznaczna z ich przystawaniem (dla którego nawet w celu odróżnienia używa się wtedy znaku $\cong$ lub $\equiv$).

Na tej zasadzie wielokąty, podobnie do odcinków, kątów i łuków, mogą być do siebie dodawane, odejmowane, dzielone na części, czyli wielokąty stanowią nowy rodzaj wielkości geometrycznych i działania na nich podlegać będą ogólnym prawom, rządzącym działaniami na liczbach, odcinkach, kątach i łukach.

Zadanie 14. Prostokąt zamienić na równoważny mu kwadrat.



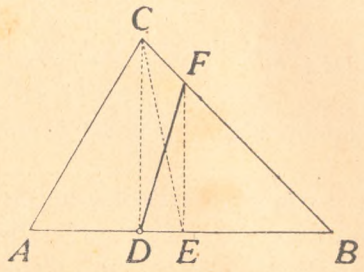
Rys. 171.

Zadanie możemy rozwiązać na mocy twierdzenia Euklidesa o wysokości trójkąta prostokątnego. Niech będzie dany prostokąt, którego podstawa $= a$, wysokość $= b$. Wykreślmy trójkąt prostokątny ABC (rys. 171), którego przeciwprostokątna $= a + b$, a rzuty na nią przyprostokątnych są: a i b, wtedy, jak wiemy, kwadrat, zbudowany na wysokości CD, będzie równoważny prostokątowi o bokach a i b.

Wniosek. Ponieważ prostokąt możemy przekształcić na trójkąt i odwrotnie, a każdy wielokąt na trójkąt, widzimy, że potrafimy każdy wielokąt zamienić na równoważny mu kwadrat.

Zadanie 15. Trójkąt podzielić na równoważne części prostemi wychodzącemi z wierzchołka.

Trzeba podstawę podzielić na daną liczbę równych części i punkty podziału połączyć z wierzchołkiem danego trójkąta.



Rys. 172.

Zadanie 16. Trójkąt podzielić na dwie części równoważne prostą, przechodzącą przez punkt dany na boku trójkąta.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 172), który trzeba podzielić na dwie części równoważne prostą, przechodzącą przez punkt D, położony na AB. Podzielmy AB na połowy w punkcie E, wtedy CE dzieli dany trójkąt na dwie części równoważne: ACE i ECB, chodzić teraz będzie o to, żeby zamiast trójkąta EBC

o podstawie EB mieć równoważny trójkąt o podstawie DB. Wykonawszy konstrukcję, jak w zadaniu 11, otrzymujemy żądany odcinek DF.

Uwaga. W podobny sposób dokonywa się podziału trójkąta na więcej części równoważnych.

Zadanie 17. Podzielić równoległobok na części równoważne prostemi równoległemi do jego boków.

Rozwiązuje się łatwo, dzieląc podstawę równoległoboku na równe części i prowadząc równoległe do boków.

Zadanie 18. Podzielić równoległobok na części równoważne prostemi wychodzącemi z jego wierzchołka.

Jeśli liczba części jest parzysta, to zadanie rozwiązuje się, dzieląc każdy z boków, nie zawierających danego wierzchołka, na połowę danej liczby i łącząc ten wierzchołek z punktami podziału.

Jeżeli liczba części jest nieparzysta, to dzielimy naprzód na podwójną liczbę części, a potem punkty podziału łączymy z wierzchołkiem co drugi.

Zadanie 19. Zbudować trójkąt równy sumie dwu lub więcej trójkątów danych.

Budujemy naprzód trójkąty równoważne danym, ale mające wspólną wysokość, następnie wystawiamy trójkąt o tej samej wysokości, o podstawie zaś równej sumie podstaw otrzymanych poprzednio trójkątów.

Zadanie 20. Zbudować trójkąt dwa lub więcej razy większy od danego.

Rozwiązuje się na zasadzie poprzedniego zadania.

Zadanie 21. Zbudować równoległobok dwa lub więcej razy większy od danego.

Zadanie 22. Zbudować kwadrat dwa razy większy od danego.

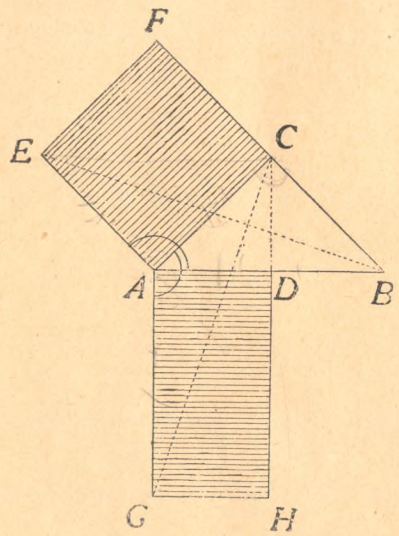
Można zestawić dwa równe kwadraty, otrzymamy prostokąt, który potem należy zamienić na równoważny kwadrat. Łatwiej można rozwiązać, budując kwadrat na przekątnej danego kwadratu.

Uwaga. Jeżeli trzeba wykreślić kwadrat 3, 4... razy większy od danego, wykreślamy naprzód prostokąt 3, 4... razy większy od danego kwadratu, a potem zamieniamy go na kwadrat.

§ 36. Twierdzenie Pitagorasa i jego uogólnienie.

209. **Twierdzenie** (pomocnicze). Kwadrat, wystawiony na przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z przeciwprostokątnej i rzutu na nią tej przyprostokątnej.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rys. 173), na przyprostokątnej AC wystawiamy kwadrat $AEFC$; rzutem boku AC na przeciwprostokątną jest AD, na tym odcinku budujemy prostokąt o wysokości $AG = AB$. Mamy dowieść, że $AEFC \sim ADHG$.



Rys. 173.

Dowód. Połączmy punkty E z B, G i C, otrzymamy dwa trójkąty równe: $AEB = ACG$, dlatego że

$$AE = AC,$$
$$AB = AG.$$

$\sphericalangle EAB = \sphericalangle CAG$, jako złożone z części równych.

Ale trójkąt AEB ma z kwadratem $AEFC$ wspólną podstawę AE i wysokość ma równą wysokości kwadratu ($FB \parallel AE$), stąd wnioskujemy, że trójkąt AEB jest równoważny połowie kwadratu $AEFC$:

$$\triangle AEB \sim {}^1/_2\, AEFC.$$

Dalej trójkąt $\triangle AGC$ z prostokątem $AGHD$ ma tak samo wspólną podstawę AG i wysokość GH, a zatem

$$\triangle ACG \sim {}^1/_2\, ADHG,$$

a że trójkąty te były sobie równe, więc

$$AEFC \sim ADHG.$$

Tak samo można dowieść o kwadracie zbudowanym na przyprostokątnej CB i prostokącie zbudowanym z AB i DB.

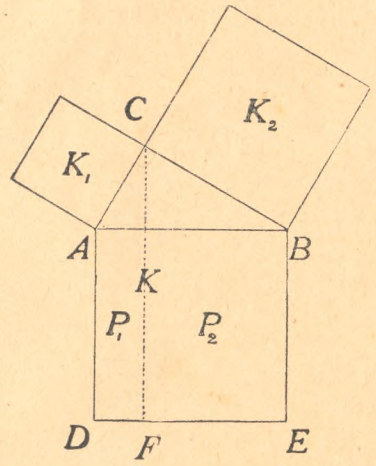
210. **Twierdzenie Pitagorasa.** Kwadrat, zbudowany na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na obu przeciwprostokątnych.

Na bokach danego trójkąta prostokątnego ABC (rys. 174) zbudujmy kwadraty K, K_1 i K_2. Jeżeli z wierzchołka C kąta prostego poprowadzimy prostopadłą CF, to podzielimy kwadrat K na dwa prostokąty: P_1 i P_2. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia wiemy, że każdy z tych prostokątów jest równoważny kwadratowi, zbudowanemu na odpowiedniej przyprostokątnej, a mianowicie:

$$P_1 \sim K_1,\ P_2 \sim K_2,$$

a że $P_1 + P_2 = K$, więc będzie

$$K \sim K_1 + K_2, \qquad \text{c. b. d. d.}$$



Rys. 174.

211. *Uwaga 1.* Przytoczone twierdzenie znane jest w geometrji pod nazwą twierdzenia *Pitagorasa*, znakomitego filozofa i matematyka starożytnej Grecji.

Pitagoras był rodem z wyspy *Samos* (580—500 przed Chr.), a około 540 r. zamieszkał w Krotonie, w starożytnej Italji, gdzie założył słynną szkołę, która szeroko po świecie rozniosła jego imię.

Twierdzenie, które właśnie poznaliśmy, jest niewątpliwie odkryciem Pitagorasa, ale niewiadomy jest sposób dowodzenia samego odkrywcy. Dowód, który podaliśmy, łącznie z poprzedniem twierdzeniem pomocniczem, spotykamy w Euklidesa „Elementach".

Trójkąt o bokach: 3, 4 i 5 znany był już dawniej Egipcjanom i prawdopodobnie Pitagoras, opierając się na własności boków trójkąta „egipskiego" ($3^2 + 4^2 = 5^2$), powziął myśl uogólnienia i doszedł do swego słynnego twierdzenia.

Twierdzenie Pitagorasa nabrało wielkiego a zasłużonego rozgłosu w świecie starożytnym i znane było pomiędzy innemi pod nazwą *Inventum hecatombae dignum*, dlatego że, jak niesie podanie, Pitagoras przez wdzięczność za odkrycie miał złożyć muzom hekatombę (ofiarę ze stu wołów).

202. *Uwaga 2.* Jak bardzo twierdzenie Pitagorasa interesowało dawniej uczonych, świadczy fakt, że znanych jest zgórą czterdzieści sposobów jego dowodzenia.

Podajemy tu jeden z dowodów, którego, jak przypuszczają, użył sam Pitagoras.

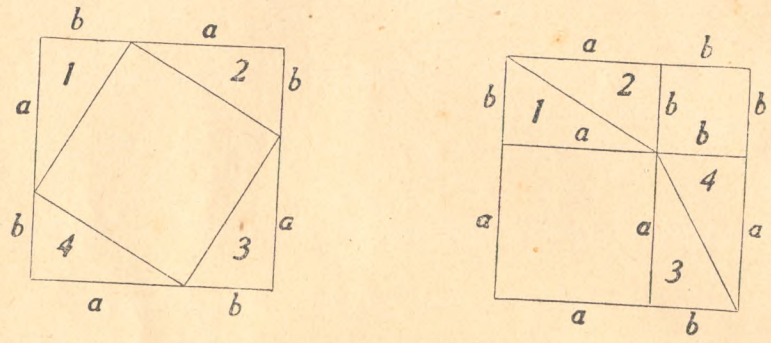
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b i przeciwprostokątnej c (rys. 175). Zbudujmy kwadrat o boku $a + b$ i na każdym z jego boków odmierzmy odcinki a i b, jak wskazuje rys. 1-szy i połączmy punkty

podziału, otrzymamy cztery równe sobie trójkąty. Jeżeli teraz te trójkąty zgrupujemy parami, jak wskazuje rys. 2-gi, i umieścimy je w tym samym kwadracie, to zobaczymy, że:

1) jeżeli od całego kwadratu (o boku $a + b$) odejmiemy cztery trójkąty, otrzymamy kwadrat o boku c;

2) jeżeli od tego samego całego kwadratu odejmiemy te same 4 trójkąty, ale zgrupowane po dwa, otrzymamy dwa kwadraty: jeden o boku a, drugi o boku b.

Stąd wniosek, że kwadrat, zbudowany na przeciwprostokątnej c, jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na bokach a i b.



Rys. 175.

213. Łatwo się przekonać o prawdziwości twierdzenia przeciwnego względem twierdzenia Pitagorasa.

Jeżeli wyobrazimy sobie trójkąt ABC, o bokach AC i CB takich samych, jak poprzednio, ale o kącie C ostrym, to oczywiście bok AB będzie mniejszy, a więc i kwadrat na nim zbudowany, jest mniejszy od sumy kwadratów, wystawionych na dwu pozostałych bokach.

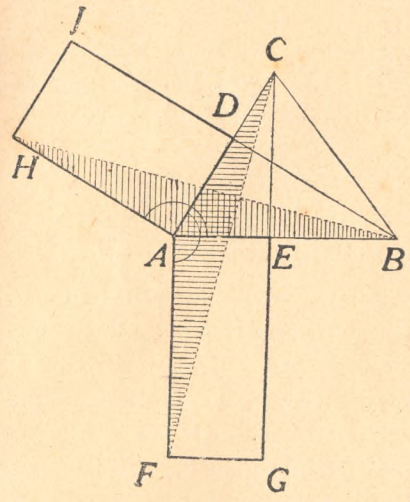
Rozumując tak samo, wnioskujemy, że kwadrat zbudowany na boku trójkąta, położonym naprzeciw kąta rozwartego, będzie większy od sumy zbudowanych kwadratów na dwu pozostałych bokach.

214. Na zasadzie powyższych rozumowań możemy powiedzieć, że i **twierdzenia odwrotne** będą prawdziwe:

1. Jeżeli kwadrat, wystawiony na jednym z boków trójkąta, jest równoważny sumie kwadratów, wystawionych na dwu pozostałych bokach, to kąt przeciwległy pierwszemu bokowi jest prosty.

2. Jeżeli kwadrat, wystawiony na jednym z boków trójkąta, nie jest równoważny sumie kwadratów,

wystawionych na dwu pozostałych bokach, to kąt przeciwległy pierwszemu bokowi nie jest prosty, a mianowicie: jest ostry, jeżeli pierwszy kwadrat jest mniejszy od sumy dwu innych, — jest rozwarty, jeżeli ten kwadrat jest większy od sumy dwu innych kwadratów.



Rys. 176.

215. Twierdzenie Pitagorasa można uogólnić na trójkąt dowolny; uprzednio jednak udowodnimy następujące **twierdzenie** pomocnicze (jako uogólnienie tw. ust. 209):

W każdym trójkącie prostokąt, zbudowany z jednego boku i rzutu na niego drugiego boku, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z drugiego boku i rzutu na niego boku pierwszego.

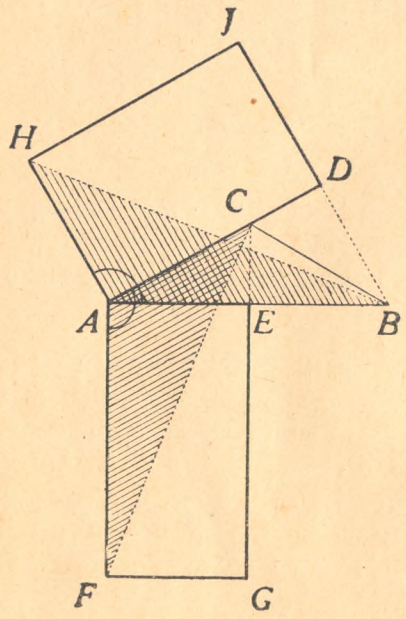
W trójkącie ABC (rys. 176) poprowadźmy dwie wysokości CE i BD, rzutem boku AC na AB jest AE, rzutem zaś boku AB na AC jest AD. Zbudujmy prostokąty: $AEGF$ o bokach $AF = AB$ i AE, oraz $ADIH$ o bokach $AH = AC$ i AD.

Aby udowodnić, że te prostokąty są równoważne, rozumujemy, jak w twierdzeniu poprzedniem: utwórzmy dwa trójkąty: ACF i AHB równe sobie, pierwszy z nich jest równoważny połowie prostokąta $AEGF$, drugi połowie prostokąta $ADIH$, a że te trójkąty są sobie równe, więc prostokąty $AEGF$ i $ADIH$ są równoważne.

Na rysunku 177 uwzględniono przypadek, kiedy $\sphericalangle C$ jest rozwarty.

216. **Uogólnienie twierdzenia Pitagorasa.**

Niech będzie dany trójkąt ABC o kącie C ostrym (rys. 178), wystawmy na jego bokach kwadraty i poprowadźmy wszystkie trzy wysokości, przedłużając je do przecięcia się z odpowiedniemi bo-



Rys. 177.

kami kwadratów. Wtedy każdy z tych kwadratów podzieli się na dwa prostokąty. Na zasadzie poprzednich twierdzeń widzimy, że:

prostok. $\sim$ 1 prost. 1′,
prostok. 2 $\sim$ prost. 2′,
prostok. 3 $\sim$ prost. 3′.

Ale

kwadr. (AB) = prost. 1 + prost. 2,
kwadr. (AC) = prost. 1′ + prost. 3,
kwadr. (CB) = prost. 2′ + prost. 3′.

A więc

kw. $(AB) \sim$ kw. (AC) +
kw. (CB) — 2 prost. (3),

czyli: w trójkącie kwadrat, zbudowany na boku przeciwległym kątowi ostremu, jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na dwu pozostałych bokach, mniej podwójny prostokąt, zbudowany na jednym z tych dwu boków oraz na rzucie na niego boku drugiego.

Niech teraz będzie dany trójkąt ABC o kącie C rozwartym (rys. 179), zbudujmy znowu na jego bokach kwadraty i poprowadźmy w trójkącie wszystkie trzy wysokości $CD \perp AB$, $AE \perp CB$ i $BF \perp AC$. Na zasadzie poprzednich twierdzeń widzimy, że prost. $AG \sim$ prost. AH, prost. $BG \sim$ prost. BI, więc:

kwadr. $(AB) \sim$ prost. AH + prost. BI,

dalej:

prost. AH = kw. (AC) + prost. CH, prost. BI = kw. (CB) + prost. CI,

więc:

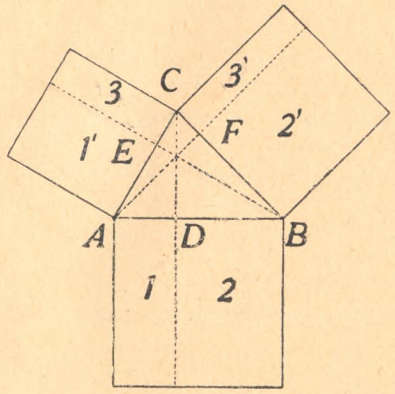
kw. $(AB) \sim$ kw. (AC) + kw. (CB) + prost. CH + prost. CI.

A że

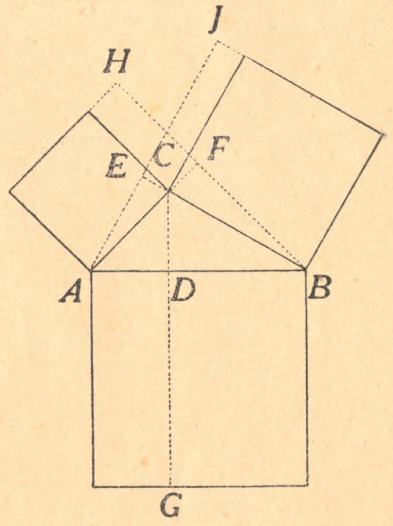
prost. $CH \sim$ prost. CI,

więc:

kw. $(AB) \sim$ kw. (AC) + kw. (CB) + 2 prost. CH,



Rys. 178.



Rys. 179.

czyli: w trójkącie kwadrat, zbudowany na boku przeciwległym kątowi rozwartemu, jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na dwu pozostałych bokach, więcej podwójny prostokąt, zbudowany na jednym z tych dwu boków oraz na rzucie na niego boku drugiego.

§ 37. Ćwiczenia.

(1—18) Dowieść następujących twierdzeń:

1. Prostokąt, który ma za podstawę przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, a wysokość z nim wspólną, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z przyprostokątnych.

2. Ze wszystkich trójkątów, mających po dwa boki odpowiednio równe, największy jest ten, który ma kąt między temi bokami prosty.

3. Obwód trójkąta równoramiennego jest większy od obwodu równoważnego mu prostokąta o tej samej wysokości.

4. Ze wszystkich trójkątów o tej samej podstawie i tym samym kącie przeciwległym największy jest trójkąt równoramienny.

5. Ze wszystkich trójkatów, które tworzą ramiona danego kąta z prostemi, przechodzącemi przez dany punkt na dwusiecznej kąta, najmniejszy jest trójkąt równoramienny.

6. Ze wszystkich równoważnych sobie trójkątów najmniejszy obwód ma trójkąt równoboczny.

7. Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli są równoważne i mają po dwa kąty odpowiednio równe.

8. Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli są równoważne oraz mają podstawy równe i po kącie do niej przyległym równym.

9. Ze wszystkich równoległoboków o tej samej podstawie i wysokości najmniejszy obwód ma prostokąt.

10. Jeżeli kwadrat i prostokąt mają równe obwody, to kwadrat jest większy od prostokąta o kwadrat, zbudowany na połowie różnicy boków prostokąta.

11. Ze wszystkich równoległoboków tego samego obwodu największy jest kwadrat.

12. Suma dwu kwadratów, zbudowanych na dwu danych nierównych odcinkach, jest większa od podwójnego prostokąta, zbudowanego z tych odcinków, a kwadrat zbudowany na sumie tych odcinków jest większy od poczwórnego prostokąta z nich zbudowanego.

13. Odcinek, który łączy środki obu podstaw trapezu, dzieli go na dwie części równoważne.

14. Jeżeli obie podstawy trapezu podzielimy na jednakową liczbę części równych i odpowiednie punkty podziału połączymy odcinkami, to trapez podzieli się na części równoważne.

15. Jeżeli środek jednego z nierównoległych boków trapezu połączymy z końcami przeciwległego boku, to utworzony w ten sposób trójkąt będzie równy połowie danego trapezu.

16. Jeżeli środek przekątnej czworokąta połączymy z przeciwległemi wierzchołkami, to te odcinki podzielą czworokąt na dwie części równoważne.

17. Jeżeli środki boków czworokąta połączymy kolejno odcinkami, to utworzy się równoległobok równoważny połowie danego czworokąta.

18. Suma kwadratów, wystawionych na przekątnych trapezu, jest równa sumie kwadratów, wystawionych na bokach nierównoległych, więcej podwójny prostokąt zbudowany z boków równoległych trapezu.

19. Zbudować kwadrat równy $^1/_4$ danego kwadratu.

20. Zbudować równoległobok dwa razy mniejszy od danego czworokąta.

21. Zbudować równoległobok dwa razy większy od danego czworokąta.

22. Zbudować równoległobok równoważny sumie dwu danych różnych równoległoboków.

23. Podzielić dany trójkąt na trzy części równoważne prostemi, wychodzącemi z punktu danego na jednym z boków trójkąta.

ROZDZIAŁ VII.

Położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

§ 38. Prosta i płaszczyzna do siebie prostopadłe.

217. Poznaliśmy już dawniej (patrz § 3) zasadnicze własności płaszczyzny, przytoczymy je tu dla przypomnienia.

Przedewszystkiem wiemy, że płaszczyznę w przestrzeni wyznaczają w zupełności:

1°. trzy punkty, niepołożone na jednej prostej, albo

2°. prosta i punkt poza nią leżący, albo

3°. dwie przecinające się proste, albo wreszcie

4°. dwie równoległe proste. Wynika to z określenia równoległości dwu prostych.

Wiemy dalej, że:

Prosta, która ma dwa punkty wspólne z płaszczyzną, leży całkowicie na tej płaszczyźnie.

Jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, to muszą mieć i drugi, czyli linja przecięcia się dwu płaszczyzn jest prosta.

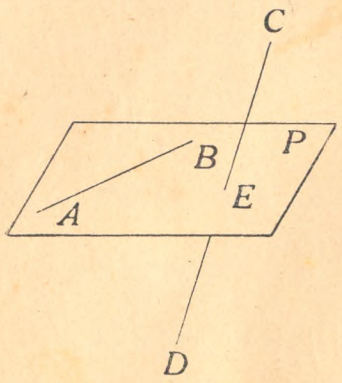
Płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części czyli dwa obszary, to znaczy, że odcinek, łączący dwa punkty w przestrzeni, położone w różnych jej częściach, przecina płaszczyznę.

Zastanawiając się następnie nad położeniem dwu prostych w przestrzeni, możemy powiedzieć, że albo one mają jeden punkt wspólny, albo nie mają żadnego.

W pierwszym razie proste p r z e c i n a j ą s i ę z sobą i wyznaczają płaszczyznę, co jednak będzie w drugim przypadku?

Jeżeli dwie proste, nie mające żadnego punktu wspólnego, leżą na jednej płaszczyźnie, to są do siebie r ó w n o l e g ł e. Ale może być dana prosta AB (rys. 180) położona na płaszczyźnie P

i prosta CD, przecinająca tę płaszczyznę w pewnym punkcie E niepołożonym na prostej AB.



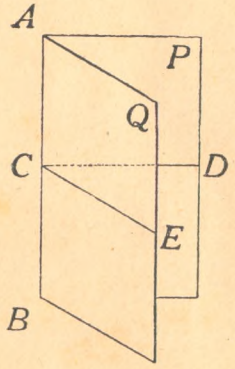
Rys. 180.

Wtedy proste AB i CD nie mają punktu wspólnego i niema takiej płaszczyzny, któraby obie te proste zawierała.

Takie proste nazywamy s k o ś n e m i albo w i c h r o w a t e m i.

218. Mając daną w przestrzeni prostą AB (rys. 181), możemy zawsze z pewnego jej punktu C wystawić prostopadłą. Należy wtedy przez tę prostą przesunąć jakąkolwiek płaszczyznę, np. P i wystawić prostopadłą CD, położoną na tej płaszczyźnie.

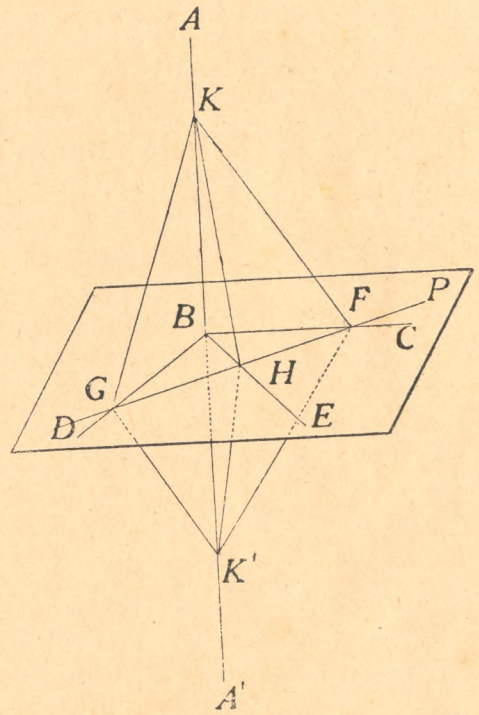
Ale, jak wiemy, przez daną prostą możemy przesunąć jeszcze inną płaszczyznę, np. Q, i znowu poprowadzić CE prostopadłą do AB; możemy tych płaszczyzn poprowadzić przez AB nieskończoną ilość, a więc i prostopadłych do AB, wystawionych z punktu C, będzie w przestrzeni ilość nieskończona. Nawzajem prosta AB będzie wtedy prostopadła do nieskończonej ilości prostych w przestrzeni, poprowadzonych przez dany punkt na tej prostej.



Rys. 181.

219. **Twierdzenie.** J e ż e l i p r o s t a j e s t p r o s t o p a d ł a d o d w u p r o s t y c h w p r z e s t r z e n i, p o p r o w a d z o n y c h p r z e z d a n y p u n k t n a n i e j, t o j e s t o n a p r o s t o p a d ł a d o w s z e l k i e j p r o s t e j, p o p r o w a d z o n e j p r z e z t e n p u n k t i p o ł o ż o n e j n a p ł a s z c z y ź n i e, w y z n a c z o n e j p r z e z p i e r w s z e d w i e p r o s t e.

Niech prosta AA' (rys. 182) będzie prostopadła do dwu prostych: BC i BD, wychodzących z punktu B. Przez te dwie proste przesuńmy płaszczyznę P i poprowadźmy na niej przez punkt B dowolną prostą BE. Należy dowieść, że $AA' \perp BE$.



Rys. 182.

Przetnijmy trzy proste na płaszczyźnie: BD, BC i BE jakąkolwiek prostą w punktach: F, G i H, odmierzmy następnie na prostej AA' dwa równe odcinki $BK = BK'$ i połączmy każdy z punktów F, G i H z punktami K i K'. Wtedy będziemy mieli $KF = K'F$ i $KG = K'G$, dlatego że każda z prostych BC i BG jest osią symetrji odcinka KK'.

Stąd wynika, że $\triangle KGF = \triangle K'GF$, a więc
$\sphericalangle KGH = \sphericalangle K'GH$,

a zatem będzie:
$\triangle KGH = \triangle K'GH$,

a stąd:

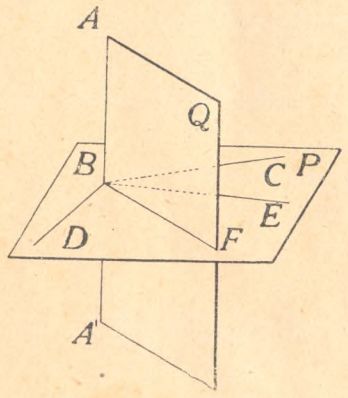
$$KH = K'H,$$

stąd zaś wynikać będzie, że

$$\triangle KBH = \triangle K'BH, \text{ a więc}$$
$$\sphericalangle KBH = \sphericalangle K'BH,$$

a że to są kąty przyległe, więc muszą być proste, czyli KK' albo $AA' \perp BE$, o co właśnie chodziło.

220. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli z punktu danej prostej są wystawione dwie prostopadłe do niej, to wszelka prostopadła do danej prostej, wystawiona z tego samego punktu, leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez pierwsze dwie proste.



Rys. 183.

Dana jest prosta AA' (rys. 183), na niej punkt B, z którego wyprowadzono prostopadłe do niej: BC i BD. Te dwie proste wyznaczają płaszczyznę P.

Z punktu B wystawiono jeszcze trzecią prostopadłą do AA', mianowicie BE; mamy dowieść, że BE leży na płaszczyźnie P.

Przypuśćmy, że tak nie jest i przez dwie przecinające się proste AA' i BE przesuńmy płaszczyznę Q, która niech przetnie płaszczyznę P (przeciąć musi, bo ma z nią punkt B wspólny) według pewnej prostej, np. BF. Wtedy na zasadzie poprzedniego twierdzenia powiedzieć musimy, że AA' będzie prostopadła do BF, leżącej na płaszczyźnie P, ale wtedy wypadałoby, że na tej samej płaszczyźnie Q z punktu B wystawiono dwie prostopadłe do AA', co jest niemożliwe.

A zatem prosta BE leży na płaszczyźnie P.

221. **Wnioski.** 1. Płaszczyzna, na której są położone wszystkie proste prostopadłe do danej prostej w pewnym jej punkcie, nazywa się płaszczyzną prostopadłą do prostej. Nawzajem prosta, która jest prostopadła do wszelkiej prostej, położonej na płaszczyźnie, poprowadzonej przez punkt przecięcia, nazywa się prostą prostopadłą do płaszczyzny.

powtórzyć na str. 75.

Na zasadzie więc poprzednich dwu twierdzeń możemy powiedzieć:

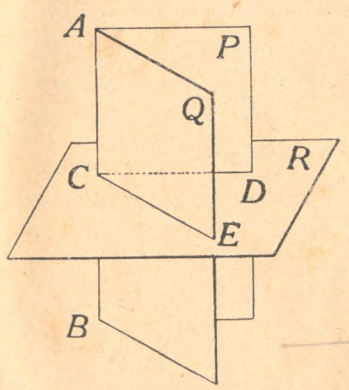
miejscem geometrycznem wszystkich prostych w przestrzeni, prostopadłych do danej prostej w pewnym jej punkcie, jest płaszczyzna prostopadła do tej prostej, przez ten punkt poprowadzona.

2. Z tych twierdzeń widzimy również, że koniecznym i wystarczającym warunkiem prostopadłości danej prostej do płaszczyzny jest ten, aby była ona prostopadła co najmniej do dwu prostych, położonych na tej płaszczyźnie i przechodzących przez ich punkt przecięcia.

3. Ponieważ każda z prostych: BC, BD i BE (rys. 182) jest prostopadła do odcinka KK' i przechodzi przez jego środek B, więc miejscem geometrycznem punktów w przestrzeni, jednakowo oddalonych od dwu punktów danych, jest płaszczyzna prostopadła do odcinka, łączącego dane punkty i przechodząca przez jego środek.

Ta płaszczyzna nazywa się płaszczyzną symetrji odcinka danego.

222. **Zadanie.** Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej danej.



Rys. 184.

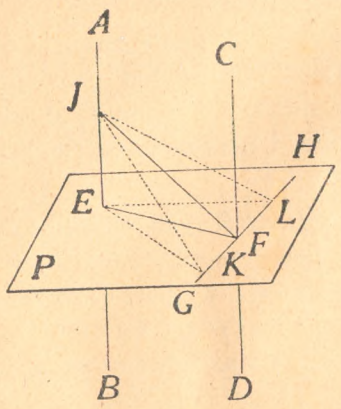
Rozróżniamy tu dwa możliwe przypadki:

1°. *Dany punkt C leży na prostej AB* (rys. 184). Przez daną prostą przesuńmy dwie dowolne płaszczyzny i z punktu C wystawmy dwie prostopadłe: CD i CE do AB, położone na tych płaszczyznach. Wtedy płaszczyzna, wyznaczona przez CD i CE, będzie żądana.

2°. *Dany punkt D leży poza prostą AB* (rys. 184). Prosta AB i punkt D, poza nią położony, wyznaczają płaszczyznę P; poprowadźmy na niej $DC \perp AB$. Następnie przez prostą AB przesuńmy dowolną płaszczyznę Q i poprowadźmy na niej $CE \perp AB$, wtedy płaszczyzna R, wyznaczona przez CD i CE, jest żądana.

Wniosek. Przez dany punkt zawsze można poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej danej, ale tylko jedną.

223. **Twierdzenie.** Dwie proste, prostopadłe do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe.



Rys. 185.

Zakładamy, że $AB \perp P$ i $CD \perp P$ (rys. 185). Punkty przecięcia tych prostych z płaszczyzną P połączmy odcinkiem EF i przez F poprowadźmy na tej płaszczyźnie prostą $GH \perp EF$.

Odmierzmy następnie odcinki $FK = FL$ i końce ich połączmy z punktem E oraz z dowolnym punktem I na prostej AB.

Wtedy będzie naprzód $EK = EL$, następnie z równości trójkątów prostokątnych IEK i IEL będzie $IK = IL$, wreszcie trójkąty IKF i ILF będą sobie równe, jako mające po trzy boki odpowiednio równe. Stąd mamy, że $\sphericalangle IFK = \sphericalangle IFL$, a więc $GH \perp IF$.

I cóż widzimy? Proste: FE, FI i FC są prostopadłe do GH, a więc te trzy proste leżą na jednej płaszczyźnie prostopadłej w punkcie F do GH (patrz 220), ale na tej samej płaszczyźnie leży także prosta AB, bo ma z nią dwa punkty wspólne. Stąd wynika, że proste AB i CD leżą na jednej płaszczyźnie, a ponieważ są obie prostopadłe do EF, więc są do siebie równoległe.

224. **Twierdzenie odwrotne.** Jeżeli jedna z dwu równoległych prostych jest prostopadła do płaszczyzny, to i druga jest do niej prostopadła.

Dowodzi się sposobem sprowadzenia do niedorzeczności.

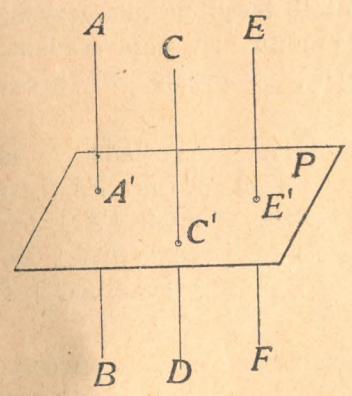
225. **Twierdzenie.** Dwie proste w przestrzeni, równoległe do trzeciej, są do siebie równoległe.

Dane są trzy proste w przestrzeni (rys. 186), zakładamy, że $AB \parallel EF$ i $CD \parallel EF$, mamy dowieść, że $AB \parallel CD$.

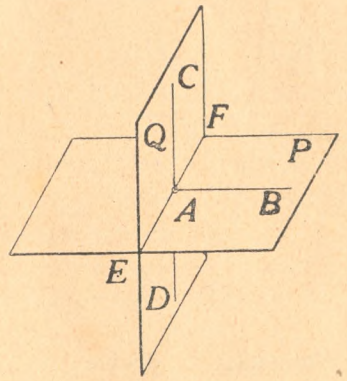
Przez dowolny punkt E' prostej EF poprowadźmy płaszczyznę $P \perp EF$. Wtedy będą również do tej płaszczyzny prostopadłe proste: AB i CD, a stąd już mamy, że $AB \parallel CD$ (patrz 223).

226. **Zadanie.** Przez dany punkt poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny danej.

1°. *Dany punkt A leży na płaszczyźnie P* (rys. 187).



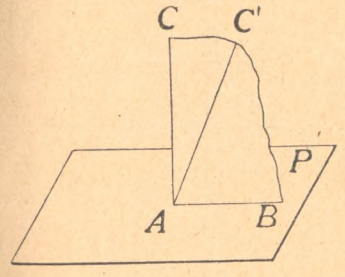
Rys. 186.



Rys. 187.

Poprowadźmy przez ten punkt na płaszczyźnie P dowolną prostą AB, następnie przez punkt A poprowadźmy płaszczyznę Q prostopadłą do AB (patrz 222). Przetnie się ona z płaszczyzną P (dlaczego?) wzdłuż pewnej prostej EF. Jeżeli teraz na płaszczyźnie Q przez punkt A poprowadzimy $CD \perp EF$, to prosta CD będzie żądaną (dlaczego?).

Wniosek. Z punktu danego na płaszczyźnie można wystawić tylko jedną prostą prostopadłą do tej płaszczyzny.

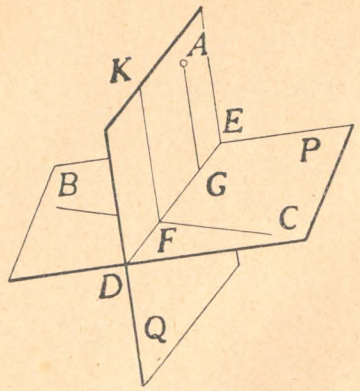


Rys. 188.

Gdyby bowiem oprócz AC można było jeszcze wystawić $AC' \perp P$ (rys. 188), to te dwie proste wyznaczyłyby płaszczyznę, która przecinałaby się z P według pewnej prostej AB i byłoby wtedy $AC \perp AB$ i $AC' \perp AB$, co jest niemożliwe.

2°. *Dany punkt A leży poza płaszczyzną P* (rys. 189).

Na płaszczyźnie P wyobraźmy sobie dowolną prostą BC i przez punkt A przesuńmy płaszczyznę Q



Rys. 189.

prostopadłą do tej prostej (ust. 222) w punkcie F. Linją przecięcia płaszczyzn Q i P niech będzie DE.

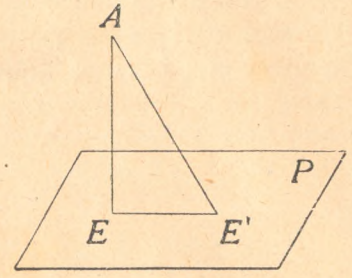
Jeżeli teraz na płaszczyźnie Q z punktu A poprowadzimy $AG \perp DE$, to prosta AG będzie żądana.

Istotnie: poprowadźmy na płaszczyźnie Q prostą $FK \parallel AG$, wtedy będziemy mieli $FK \perp DE$, a że oprócz tego będzie $FK \perp BC$, więc $FK \perp P$, a zatem i $AG \perp P$.

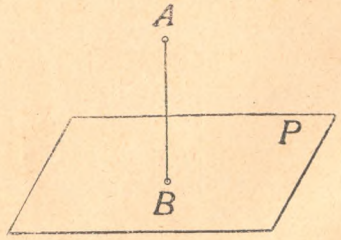
Wniosek. Z danego punktu można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do płaszczyzny danej.

Gdyby bowiem oprócz AE (rys. 190) można było wyprowadzić jeszcze $AE' \perp P$, to przesuwając przez AE i AE' płaszczyznę, otrzymalibyśmy w przecięciu z P prostą EE' i byłoby na tej płaszczyźnie $AE \perp EE'$ i $AE' \perp EE'$, co jest niemożliwe.

227. **Określenia.** Rzutem punktu na płaszczyznę nazywa się spodek prostopadłej, spuszczonej z danego punktu na płaszczyznę, np. rzutem punktu A na płaszczyznę P będzie punkt B (rys. 191), w którym prostopadła przecina się z tą płaszczyzną.

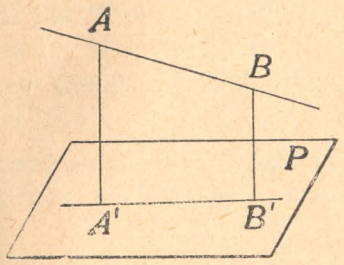


Rys. 190.



Rys. 191.

Jeżeli ze wszystkich punktów danej linji lub figury poprowadzimy prostopadłe do danej płaszczyzny, to zbiór spodków tych prostopadłych czyli miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów linji lub figury nazywa się rzutem tej linji lub figury na płaszczyznę.

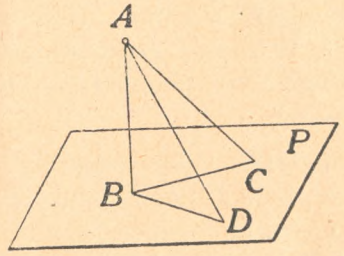


Rys. 192.

Aby otrzymać rzut prostej AB (rys. 192) na płaszczyznę P, powinniśmy znaleźć rzut każdego jej punktu, łatwo jednak zrozumieć na zasadzie poprzednich twierdzeń (patrz 223), że wszystkie prostopadłe, wyprowadzone z punktów danej prostej do płaszczyzny będą leżały w jednej płaszczyźnie i rzut prostej AB otrzymamy, łącząc rzuty A' i B' dwu punktów tej prostej.

Jeżeli dana prosta jest prostopadła do płaszczyzny rzutów, to jej rzutem będzie punkt; jeżeli prosta przecina płaszczyznę rzutów, to dla wykreślenia jej rzutu wystarczy znaleźć rzut jednego jej punktu poza punktem przecięcia z płaszczyzną.

228. Niech będzie dana płaszczyzna P (rys. 193) i punkt A. Poprowadźmy $AB \perp P$ i odcinek, łączący jakikolwiek punkt C płaszczyzny z punktem A, t. j. pochyłą AC, której rzutem będzie odcinek BC, oraz pochyłą AD, której rzutem będzie BD.



Rys. 193.

Możemy z łatwością udowodnić, że:

1°. Prostopadła jest krótsza od wszelkiej pochyłej, wyprowadzonej z tego samego punktu, i nawzajem.

2°. Dwie pochyłe są równe, jeżeli ich rzuty są równe, i nawzajem.

3°. Z dwu pochyłych ta jest większa, która ma rzut większy, i nawzajem.

Widzimy zatem, że najkrótszą odległością punktu od płaszczyzny jest odcinek prostopadłej poprowadzonej z tego punktu do płaszczyzny; tym właśnie odcinkiem mierzy się odległość punktu od płaszczyzny.

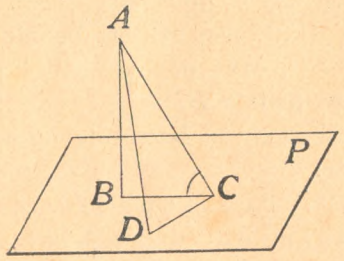
229. Powracając do twierdzenia ust. 223, widzimy, że na rys. 185 mamy z punktu I poprowadzoną prostopadłą IE do płaszczyzny P oraz pochyłą IF, której rzutem na płaszczyznę P jest odcinek EF. Dowiedliśmy wtedy, że jeżeli $GH \perp EF$, to również jest $GH \perp IF$, co możemy obecnie wypowiedzieć w sposób następujący:

Prosta, położona na płaszczyźnie i prostopadła do rzutu pochyłej, jest prostopadła do tej pochyłej.

Tę własność nazywają twierdzeniem „o trzech prostopadłych".

230. Niech będzie jeszcze dana płaszczyzna P (rys. 194), z punktu A wyprowadzono do niej prostopadłą AB oraz pochyłą AC. Rzutem AC na płaszczyznę P jest BC.

Kąt ostry, który pochyła tworzy ze swoim rzutem na płaszczyznę, nazywa się kątem nachylenia tej prostej do płaszczyzny. Np. kątem nachylenia prostej AC do płaszczyzny P (rys. 194) jest kąt ACB. O kącie tym możemy dowieść, że jest on najmniejszy z kątów, jakie dana prosta tworzy z prostemi, poprowadzonemi na płaszczyźnie przez jej spodek.



Rys. 194.

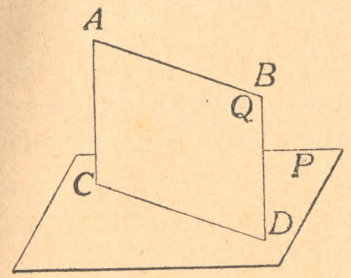
Istotnie: poprowadźmy na płaszczyźnie P przez punkt C dowolną prostą, odmierzmy na niej $CD = CB$ i połączmy punkty D i A. Wtedy otrzymamy dwa trójkąty: ABC i ADC, które mają: AC bok wspólny, $BC = DC$, ale $AB < AD$, a zatem będzie $\sphericalangle ACB < \sphericalangle ACD$, o co właśnie chodziło.

§ 39. Prosta i płaszczyzna do siebie równoległe.

231. **Określenie.** Wiemy, że prosta może mieć z płaszczyzną dwa punkty wspólne—wtedy leży całkowicie na płaszczyźnie; może mieć z płaszczyzną jeden punkt wspólny—wtedy ją przecina i bywa, jak to już widzieliśmy, albo prostopadła do płaszczyzny, albo do niej pochyła. Można jednak wyobrazić sobie prostą, która nie ma żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną — taka prosta nazywa się równoległą do tej płaszczyzny.

232. **Twierdzenie.** Prosta w przestrzeni, równoległa do innej prostej położonej na danej płaszczyźnie, jest równoległa do tej płaszczyzny.

Niech będzie dana płaszczyzna P (rys. 195), na niej prosta CD i poza płaszczyzną prosta AB równoległa do CD.

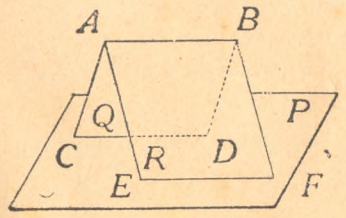


Rys. 195.

Te dwie równoległe proste wyznaczają płaszczyznę Q. Gdyby prosta AB miała z płaszczyzną P pewien punkt wspólny, to musiałby on leżeć na przedłużeniu CD, dlatego że wszystkie punkty prostej AB leżą na płaszczyźnie Q, na której również leżą punkty prostej CD. Ale to jest niemożliwe, bo z założenia $AB \parallel CD$.

Wniosek. Przez prostą AB przesuńmy inną jeszcze płaszczyznę, oprócz Q, wtedy linja jej przecięcia EF z płaszczyzną P (rys. 196) będzie równoległa do AB. Wogóle:

jeżeli przez prostą równoległą do płaszczyzny danej przesunąć jakąkolwiek płaszczyznę, to linja przecięcia tych płaszczyzn będzie równoległa do danej prostej.



Rys. 196.

233. **Zadanie.** Przez dany punkt poprowadzić prostą równoległą do płaszczyzny danej.

Zadanie rozwiązuje się łatwo na zasadzie poprzedniego twierdzenia: na danej płaszczyźnie wykreślamy dowolną prostą, następnie przez tę prostą i dany punkt przesuwamy nową płaszczyznę i na niej przez punkt dany wykreślamy równoległą do linji przecięcia płaszczyzn.

Oczywiście żądanych prostych będzie ilość nieograniczona.

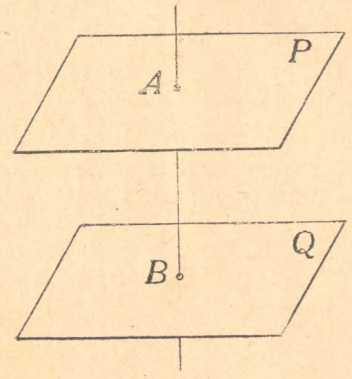
234. **Określenie.** Jeżeli z dowolnych punktów prostej równoległej do płaszczyzny poprowadzimy odcinki prostopadłe do tej płaszczyzny, to łatwo wywnioskować, że będą one sobie równe i dlatego odległość dowolnego punktu równoległej prostej od danej płaszczyzny nazywa się odległością prostej równoległej od tej płaszczyzny.

§ 40. Płaszczyzny do siebie równoległe.

235. **Określenie.** Dwie płaszczyzny, które nie mają żadnego punktu wspólnego, nazywają się równoległemi.

O istnieniu takich płaszczyzn oraz o sposobie ich wykreślania poucza następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Dwie płaszczyzny, prostopadłe do tej samej prostej, są do siebie równoległe.



Rys. 197.

Przez punkt A (rys. 197) danej prostej poprowadźmy płaszczyznę P do niej prostopadłą, również przez punkt B — płaszczyznę Q.

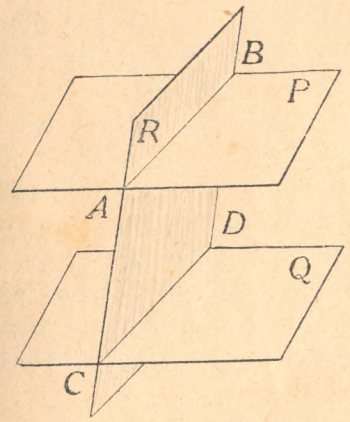
Gdyby te płaszczyzny miały punkt wspólny, to wypadałoby, że z tego punktu można poprowadzić dwie płaszczyzny prostopadłe do tej samej prostej, co jest niemożliwe (patrz 222), a więc $P \parallel Q$.

Wniosek. Przez dany punkt można poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej, ale tylko jedną.

Wynika wprost z twierdzenia.

236. **Twierdzenie.** Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny są przecięte jakąkolwiek trzecią, to linje przecięcia tych płaszczyzn są do siebie równoległe.

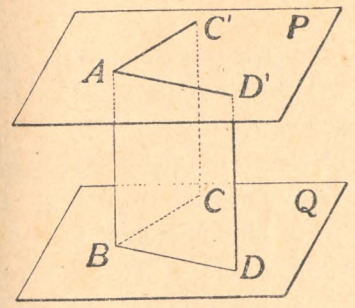
Dane są dwie równoległe płaszczyzny P i Q (rys. 198), przecięte płaszczyzną R. Mamy dowieść, że proste przecięcia AB i CD są do siebie równoległe.



Rys. 198.

Tak istotnie będzie dlatego, że gdyby proste AB i CD miały punkt wspólny, to wynikałoby stąd, że i płaszczyzny P i Q, na których te proste są położone, mają punkt wspólny, co jest niemożliwe. Jeżeli proste AB i CD nie mają punktu wspólnego, to jeszcze nie wynika, żeby miały być równoległe: może są skośne? Ale leżą one na jednej płaszczyźnie R, więc i to przypuszczenie jest niemożliwe, a zatem $AB \parallel CD$.

237. **Twierdzenie.** Prosta, która jest prostopadła do jednej z dwu równoległych płaszczyzn, jest prostopadła i do drugiej.



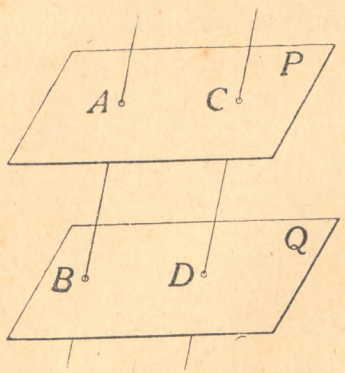
Rys. 199.

Dane są dwie równoległe płaszczyzny P i Q (rys. 199); z dowolnego punktu A pierwszej z nich wykreślamy $AB \perp Q$ (patrz 226). Jeżeli $AB \perp Q$, to AB jest prostopadła do prostych BC i BD, poprowadzonych na płaszczyźnie Q przez punkt B. Jeżeli teraz przez proste AB i BC oraz AB i BD poprowadzimy płaszczyzny, to ich linje przecięcia AC' i AD' z płaszczyzną P będą równoległe odpowiednio do BC i BD, a więc będzie $AB \perp AC'$ i $AB \perp AD'$, a więc $AB \perp P$.

238. **Twierdzenie.** Jeżeli dwie równoległe proste są przecięte dwiema równoległemi płaszczyznami, to odcinki, zawarte między temi płaszczyznami, są sobie równe.

Dwie równoległe proste AB i CD (rys. 200) przecięto dwiema równoległemi płaszczyznami P i Q. Mamy dowieść, że $AB = CD$.

Jeżeli przez dwie równoległe proste przesuniemy płaszczyznę, to dalsze rozumowanie jest już oczywiste.



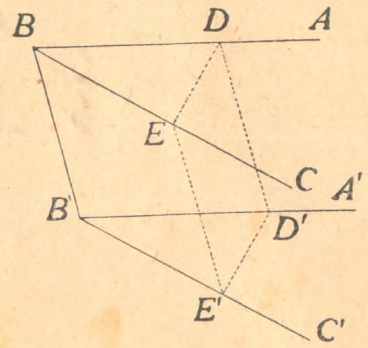
Rys. 200.

Wnioski. 1) Jeżeli z dowolnych punktów płaszczyzny P poprowadzimy prostopadłe do płaszczyzny Q, to odcinki tych prostopadłych będą sobie równe i każdy z nich nazywa się odległością dwu równoległych płaszczyzn. A więc:

dwie równoległe płaszczyzny znajdują się wszędzie w jednakowej od siebie odległości.

2) Miejscem geometrycznem punktów w przestrzeni, jednakowo odległych od danej płaszczyzny, jest płaszczyzna równoległa do danej.

239. **Twierdzenie.** Dwa kąty w przestrzeni o ramionach odpowiednio równoległych i zwrotach zgodnych są sobie równe, a płaszczyzny ich są do siebie równoległe.



Rys. 201.

Dane są dwa kąty: ABC i $A'B'C'$ (rys. 201), które mają $BA \parallel B'A'$ i $BC \parallel B'C'$.

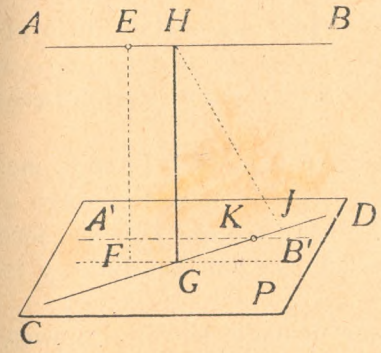
1°. Na ramionach kąta ABC odmierzmy dowolne odcinki BD i BE, a na ramionach kąta $A'B'C'$ równe im odcinki $B'D'$ i $B'E'$; poprowadźmy jeszcze BB', DD', EE'. Zauważmy naprzód, że czworokąt $BDD'B'$ jest równoległobokiem, dlatego że ma boki BD i $B'D'$ równe i równoległe, a więc będzie także BB' i DD' równe i równoległe. Dla tej samej przyczyny BB' i EE' są równe i równoległe, a więc znowu czworokąt $EDD'E'$ jest równoległobokiem, a stąd $ED = E'D'$.

Otrzymaliśmy dwa trójkąty BDE i $B'D'E'$, które mają po trzy boki odpowiednio równe, a zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$.

2°. Że płaszczyzny danych kątów są do siebie równoległe, widzimy stąd, że proste BA i BC są równoległe do płaszczyzny kąta B', jako odpowiednio równoległe do prostych $B'A'$ i $B'C'$, gdyby więc płaszczyzny kątów B i B' przecinały się z sobą, to ich linja przecięcia musiałaby być równoległa do BA i do BC (patrz 232), co jest niemożliwe.

240. Jeżeli mamy dane dwie nieprzecinające się proste, to możemy wziąć dowolny punkt i poprowadzić dwie proste odpowiednio równoległe do danych i za kąt między danemi prostemi bierzemy kąt między temi równoległemi. A więc: kątem między dwiema prostemi skośnemi nazywa się kąt, który tworzą z sobą równoległe do danych prostych, wyprowadzone z punktu dowolnego.

241. **Zadanie.** Wykreślić odcinek prostopadły do dwu prostych skośnych.



Rys. 202.

Dane są dwie proste skośne AB i CD (rys. 202). Przez dowolny punkt K prostej CD poprowadźmy $A'B' \parallel AB$ i przez dwie przecinające się proste CD i $A'B'$ przesuńmy płaszczyznę P.

Jeżeli teraz z dowolnego punktu E prostej AB poprowadzimy $EF \perp P$, a przez punkt F na tej płaszczyźnie równoległą do $A'B'$, która przetnie CD w punkcie G, to odcinek GH, równoległy do EF, będzie żądany.

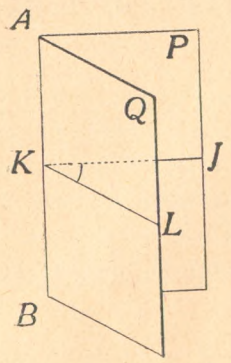
Istotnie: odcinek HG, jako prostopadły do płaszczyzny P, jest prostopadły do prostej CD, położonej na tej płaszczyźnie; z drugiej strony odcinek $GH = FE$ jest prostopadły również do AB, a więc jest prostopadły do obu danych prostych.

Wniosek. Jeżeli dowolny punkt jednej z danych prostych, np. I na CD, połączymy z punktem H, to łatwo się przekonać, że będzie on większy od GH, t. j.: odcinek prostopadły do obu prostych skośnych jest najkrótszy z odcinków, łączących punkty tych prostych.

I dlatego ten odcinek uważa się za odległość dwu prostych skośnych.

§ 41. Płaszczyzny do siebie prostopadłe.

242. **Określenia.** Jeżeli przez prostą AB (rys. 203) poprowadzimy dwie półpłaszczyzny P i Q, to utworzy się figura, którą nazywamy kątem dwuściennym, albo krócej — dwuścianem.



Rys. 203.

Półpłaszczyzny, tworzące kąt dwuścienny, nazywają się jego ścianami, a prosta, według której one się przecinają — krawędzią. Kąt dwuścienny można oznaczać albo czterema literami, np. $\sphericalangle PABQ$, tak aby nazwa krawędzi przypadała pośrodku, albo symbolem $\sphericalangle(AB)$, to znaczy kąt dwuścienny o krawędzi AB, albo wreszcie $\sphericalangle(P, Q)$, to znaczy kąt między płaszczyznami P i Q.

Jeżeli z dowolnego punktu K krawędzi wystawimy dwie prostopadłe do niej: KI położoną na płaszczyźnie P, a drugą KL—na płaszczyźnie Q, to otrzymamy kąt IKL, który nazywa się kątem linjowym danego dwuścianu.

Punkt K, z którego wystawiliśmy prostopadłe KI i KL, może być dowolnie obrany na krawędzi i wielkość kąta linjowego nie zależy od położenia punktu K (patrz 239), inaczej mówiąc, jeżeli kąt dwuścienny jest dany, to odpowiadający mu kąt linjowy jest w zupełności wyznaczony.

Łatwo wyrozumować, że nawzajem danemu kątowi linjowemu odpowiada jeden w zupełności wyznaczony kąt dwuścienny.

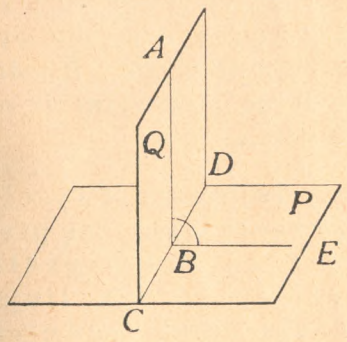
Kąty dwuścienne nazywać będziemy równemi, jeżeli odpowiadające im kąty linjowe są równe; większym z dwóch dwuścianów nazywamy ten, któremu odpowiada większy kąt linjowy. Kąt dwuścienny nazywamy prostym, jeżeli mu odpowiada kąt linjowy prosty.

Dwie płaszczyzny, które tworzą z sobą kąt prosty, nazywają się prostopadłemi do siebie.

243. **Twierdzenie.** Wszelka płaszczyzna, przesunięta przez prostą prostopadłą do płaszczyzny danej, jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Dana jest płaszczyzna P i punkt poza nią A (rys. 204), z tego punktu spuśćmy $AB \perp P$ i przez prostą AB poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę Q, która przetnie płaszczyznę P wzdłuż prostej CD.

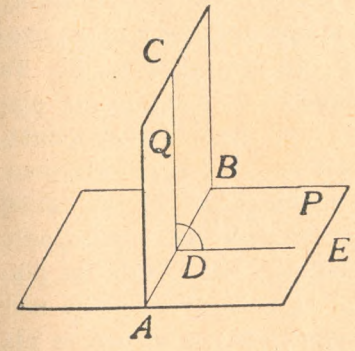
Płaszczyzny P i Q tworzą kąt dwuścienny $PCDQ$, którego krawędzią jest CD. Jeżeli teraz na płaszczyźnie P poprowadzimy $BE \perp CD$, to otrzymamy kąt ABE, który będzie kątem linjowym dwuścianu $PCDQ$, dlatego że $BA \perp P$, więc także $AB \perp CD$. Ponieważ prosta AB jest prostopadła do BE, więc kąt ABE jest prosty, a zatem i kąt dwuścienny $PCDQ$ jest prosty, czyli $P \perp Q$.



Rys. 204.

244. **Twierdzenie.** Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, to prosta, położona na jednej z nich i prostopadła do ich krawędzi, jest prostopadła do drugiej.

Dane są dwie płaszczyzny: P i Q do siebie prostopadłe (rys. 205). Z dowolnego punktu D krawędzi AB wystawmy dwie prostopadłe do AB, mianowicie DC położoną na płaszczyźnie Q i DE na płaszczyźnie P.

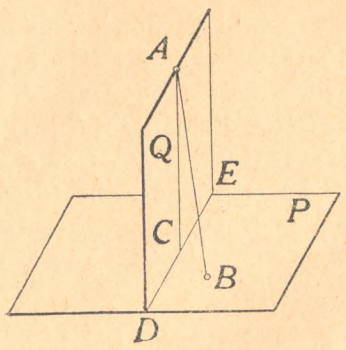


Rys. 205.

Z założenia wynika, że kąt dwuścienny $PABQ$ jest prosty, a że kąt CDE jest jego kątem linjowym, więc i kąt CDE jest prosty, czyli $CD \perp DE$. Ale z konstrukcji mamy, że $CD \perp AB$, więc $CD \perp P$.

245. **Twierdzenie.** Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, to prosta, wyprowadzona z punktu położonego na jednej z nich i prostopadła do drugiej, leży całkowicie na pierwszej płaszczyźnie.

Dane są dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny P i Q (rys. 206); na płaszczyźnie Q dany jest punkt A, z którego poprowadzono prostą prostopadłą do P; mamy dowieść, że ta prosta leży na płaszczyźnie Q.

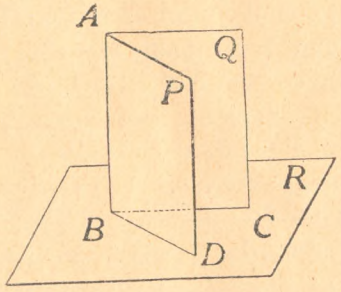


Rys. 206.

Przypuśćmy, że tak nie jest, t. j. prosta $AB \perp P$ nie leży na Q i z punktu A poprowadźmy $AC \perp DE$, wtedy musiałoby być $AC \perp P$, a zatem z punktu A byłyby wyprowadzone dwie proste AB i AC prostopadłe do płaszczyzny P, co jest niemożliwe.

246. **Twierdzenie.** Jeżeli dwie przecinające się płaszczyzny są prostopadłe do trzeciej, to ich linja przecięcia jest również prostopadła do tej płaszczyzny.

Zakładamy, że $P \perp R$ i $Q \perp R$, mamy dowieść, że $AB \perp R$ (rys. 207).



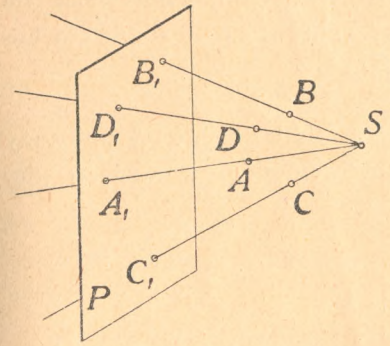
Rys. 207.

Obierzmy na AB dowolny punkt i wyprowadźmy z niego prostopadłą do płaszczyzny R. Ta prostopadła będzie leżała na płaszczyźnie P, dlatego że punkt, z którego została poprowadzona, leży na płaszczyźnie P. Dla takiej samej przyczyny ta prostopadła będzie jednocześnie leżała na płaszczyźnie Q, a że prostopadła może być tylko jedna, więc będzie nią krawędź AB.

§ 42. Pojęcie o rzucie środkowym i równoległym ukośnym. Twierdzenie Desargues'a.

247. **Określenia.** Spodek prostopadłej, spuszczonej z danego punktu na płaszczyznę, nazywaliśmy rzutem tego punktu na płaszczyznę; tak samo znajdowaliśmy rzut odcinka na płaszczyznę, jako miejsce geometryczne rzutów wszystkich jego punktów, łącząc odcinkiem rzuty obu końców odcinka danego. Taki rzut punktu lub odcinka nazywa się rzutem prostokątnym dla odróżnienia od rzutów, które można inną drogą otrzymywać.

Jeżeli wyobrazimy sobie pewien stały punkt S (rys. 208) i płaszczyznę P, to z tego punktu można wyprowadzić dowolną liczbę prostych, przecinających daną płaszczyznę.

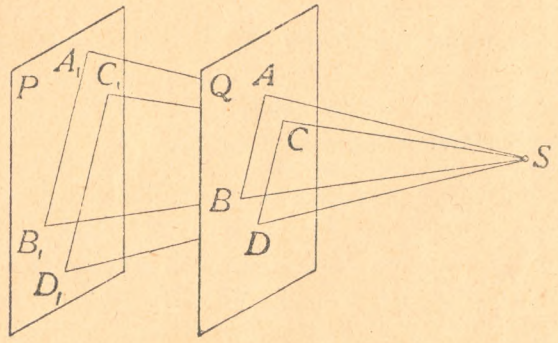


Rys. 208.

Stały punkt S nazywać będziemy środkiem rzutów, płaszczyznę P — płaszczyzną rzutów albo płaszczyzną obrazową, a proste, wychodzące ze środka — promieniami rzutującemi.

Promień SA, przechodzący przez dany punkt A niepołożony na płaszczyźnie P, przecina tę płaszczyznę w punkcie A_1, który jest rzutem punktu A na płaszczyznę rzutów P; tak samo punkt B_1 jest rzutem punktu B na tę płaszczyznę. W szczególnym przypadku, jeżeli dany punkt leży na promieniu prostopadłym do płaszczyzny, to jego rzut będzie rzutem prostokątnym punktu danego.

Rzuty punktów, w ten sposób otrzymywane, nazywają się rzutami środkowemi.

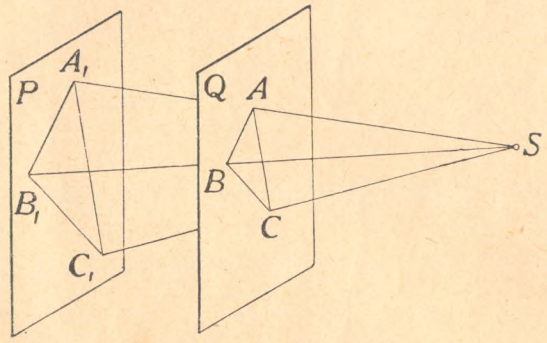


Rys. 209.

248. Niech będzie dany pewien odcinek AB (rys. 209); dla otrzymania jego rzutu wystarczy poprowadzić dwa promienie rzutujące jego końców i połączyć na płaszczyźnie P rzuty A_1 i B_1, otrzymujemy odcinek $A_1 B_1$, który będzie rzutem odcinka AB.

Jeżeli płaszczyzna, na której leży odcinek AB, jest równoległa do płaszczyzny P, to rzut A_1B_1 jest równoległy do odcinka AB (dlaczego?). Rzuty dwóch odcinków równoległych, położonych na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów, są do siebie równoległe, np. jeżeli $AB \parallel CD$, to $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

249. Niech teraz będzie dany trójkąt ABC (rys. 210) położony na płaszczyźnie Q, znajdźmy jego rzut względem środka S; płaszczyzna rzutów P jest równoległa do Q.



Rys. 210.

W tym celu wyznaczmy rzuty A_1, B_1 i C_1 wierzchołków $\triangle ABC$; żądanym rzutem będzie $\triangle A_1B_1C_1$, którego boki będą odpowiednio równoległe do boków trójkąta danego.

Stąd wynika **twierdzenie** następujące:

Jeżeli dane są w przestrzeni takie dwa trójkąty: ABC i $A_1B_1C_1$, których wierzchołki leżą parami na trzech prostych, przecinających się w jednym punkcie S i dwa boki tych trójkątów są odpowiednio równoległe: $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, to i trzecie boki AC i A_1C_1, są do siebie równoległe.

Twierdzenie staje się oczywiste, jeżeli zauważymy, że płaszczyzny P i Q są równoległe i przecięte naprzód płaszczyzną SA_1B_1, potem SB_1C_1, wreszcie SA_1C_1.

Nawzajem:

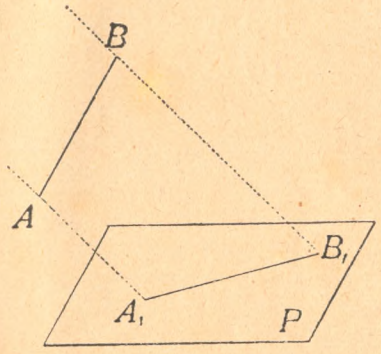
Jeżeli dwa trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ (rys. 210) tak są położone w przestrzeni, że boki ich są odpowiednio

równoległe: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ i $AC \parallel A_1C_1$, to wszystkie trzy proste, które łączą parami ich odpowiednie wierzchołki: AA_1, BB_1, CC_1, przecinają się w jednym punkcie S.

Istotnie: przez każdą parę równoległych: AB i A_1B_1, BC i B_1C_1 oraz AC i A_1C_1 przesuńmy płaszczyznę; 1-sza płaszczyzna z 2-gą przecina się według prostej BB_1, 2-ga z 3-cią według CC_1, a trzecia z 1-szą według AA_1 (dlaczego?). Proste BB_1 i CC_1 niech się przecinają z sobą w punkcie S, punkt ten będzie wspólny dla wszystkich trzech płaszczyzn, a ponieważ prosta AA_1 jest linją przecięcia płaszczyzn 3-ciej i 1-ej, więc musi ona przechodzić również przez punkt S.

Otrzymane twierdzenie oraz do niego odwrotne znane jest pod nazwą **twierdzenia Desargues'a**, znakomitego matematyka francuskiego z XVII w.

250. **Określenia.** Jeżeli środek rzutów oddala się w nieskończoność, to promienie rzutujące można uważać za równoległe do siebie i otrzymujemy w ten sposób rzut równoległy ukośny, którego szczególnym przypadkiem jest rzut prostokątny (kiedy promienie rzutujące są prostopadłe do płaszczyzny rzutów).



Rys. 211.

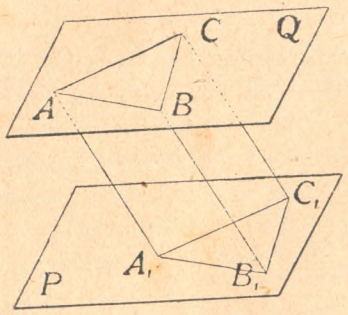
Niech będzie dany np. odcinek AB i płaszczyzna rzutów P (rys. 211). Jeżeli przez końce A i B poprowadzimy w danym kierunku promienie rzutujące, to ich punkty przecięcia z płaszczyzną P będą rzutami punktów A i B, a odcinek A_1B_1 rzutem ukośnym odcinka AB.

Oczywiście, jeżeli dany odcinek jest równoległy do płaszczyzny rzutów, to jego rzut jest mu równy. Rzuty dwóch równoległych odcinków będą do siebie równoległe.

251. Niech będzie dany trójkąt ABC (rys. 212), którego płaszczyzna Q jest równoległa do płaszczyzny rzutów P; łatwo wyrozumować, że jego rzutem ukośnym będzie trójkąt $A_1B_1C_1$, równy danemu trójkątowi i o bokach odpowiednio równoległych do boków danego.

Stąd wysnuwamy następujące **twierdzenie**, stanowiące szczególny przypadek tw. Desargues'a:

Jeżeli dane są w przestrzeni dwa trójkąty do siebie przystające o bokach odpowiednio równoległych, to proste, które łączą parami odpowiednie wierzchołki tych trójkątów, są do siebie równoległe.

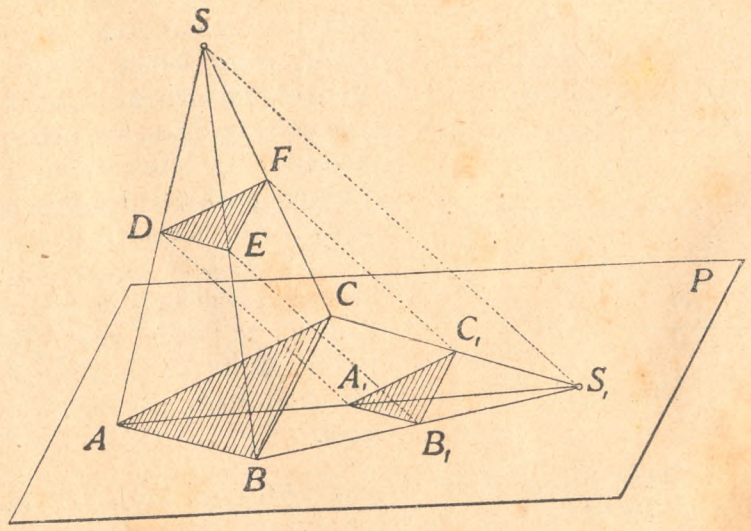


Rys. 212.

Istotnie: jeżeli $P \parallel Q$ (rys. 212) i $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, to $AB = A_1B_1$ i $AB \parallel A_1B_1$, a więc $AA_1 \parallel BB_1$, tak samo będzie $BB_1 \parallel CC_1$.

Uwaga. Twierdzenie powyższe ma zastosowanie również do trójkątów, położonych na jednej płaszczyźnie; dowód analogiczny.

252. Zastosujemy teraz twierdzenie Desargues'a (proste i odwrotne) do trójkątów, położonych na jednej płaszczyźnie.



Rys. 213.

Niech będą dane na płaszczyźnie P dwa trójkąty: ABC i $A_1B_1C_1$ (rys. 213), które mają $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ i $AC \parallel A_1C_1$; możemy dowieść, że proste AA_1, BB_1 i CC_1 przecinać się będą w jednym punkcie.

Istotnie: znajdźmy rzut ukośny trójkąta $A_1B_1C_1$ na dowolną płaszczyznę równoległą do pł. P, otrzymamy $\triangle DEF$ o bokach równoległych do boków trójkąta $A_1B_1C_1$, a zatem i do boków trójkąta ABC. W ten sposób otrzymujemy w przestrzeni dwa trójkąty: ABC i DEF, o których już wiemy, że proste AD, BE i CF, łączące ich odpowiednie wierzchołki, przecinać się będą w jednym punkcie—niech nim będzie S.

Jeżeli teraz znajdziemy taki sam rzut ukośny punktu S na płaszczyźnę P, to w tym właśnie punkcie S_1 ($SS_1 \parallel AD \parallel BE \parallel CF$) przetną się proste AA_1, BB_1 i CC_1. Wynikać to będzie stąd, że punkt S_1, jako rzut punktu S, położonego na SDA, SEB i SFC, musi leżeć jednocześnie na rzutach tych trzech odcinków, inaczej mówiąc, będzie punktem wspólnym dla tych rzutów: AA_1S_1, BB_1S_1 i CC_1S_1.

W podobny sposób możemy dowieść twierdzenia odwrotnego.

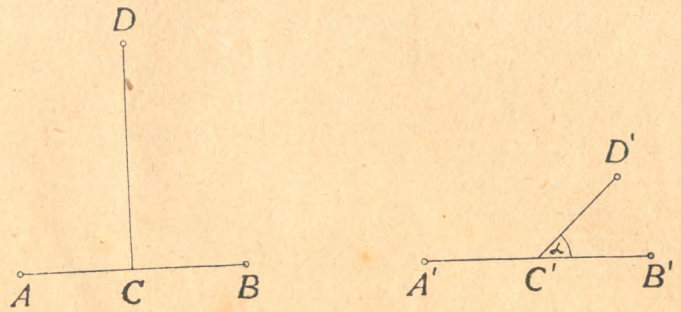
Mamy mianowicie na płaszczyźnie P dwa trójkąty: ABC i $A_1B_1C_1$, które mają dwa boki odpowiednio równoległe: $AB \parallel A_1B_1$ i $BC \parallel B_1C_1$ i oprócz tego wiadomo, że trzy proste, łączące parami ich odpowiednie wierzchołki: AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie S_1; należy dowieść, że trzecie boki tych trójkątów AC i A_1C_1 są do siebie równoległe.

Znajdźmy znowu rzut ukośny trójkąta $A_1B_1C_1$ na dowolną płaszczyznę równoległą do P, otrzymamy $\triangle DEF$ o bokach równoległych do boków $\triangle A_1B_1C_1$. Przez punkt S_1 poprowadźmy równoległą do promienia rzutującego A_1D; niech ona przetnie prostą AD, jako położoną w tej samej płaszczyźnie SAS_1, w pewnym punkcie S, wtedy S_1 będzie rzutem punktu S na pł. P.

Ponieważ $B_1E \parallel A_1D \parallel C_1F$, więc promień rzutujący SS_1 przeciąć musi również proste BE i CF, a że punkt S_1 jest tym samym rzutem dla wspomnianych punktów przecięcia, więc trzy proste AD, BE i EF przecinać się muszą w jednym punkcie S. W takim razie trójkąty ABC i DEF, które miały po dwa boki odpowiednio równoległe, muszą mieć i trzecie boki równoległe, t. j. $AC \parallel DF$, a więc także $AC \parallel A_1C_1$, c. b. d. d.

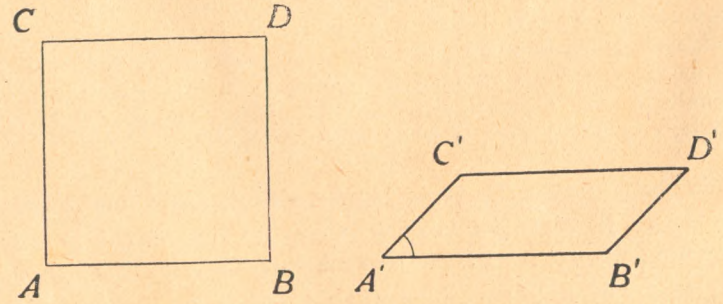
Widzimy zatem, że twierdzenie Desargues'a ma zastosowanie do dwóch trójkątów, położonych zarówno na jednej płaszczyźnie, jak i na dwóch równoległych płaszczyznach. W ogólnej swej postaci dotyczy ono nawet pewnych trójkątów, położonych na 2-ch przecinających się płaszczyznach, tem jednak uogólnieniem zajmować się nie będziemy.

253. Rzut ukośny równoległy najczęściej bywa stosowany w rysowaniu figur przestrzennych. Dla powzięcia pojęcia o robieniu takich rysunków, zauważmy przedewszystkiem, że odcinek równoległy do płaszczyzny rzutów ma rzut równy temu odcinkowi i do niego równoległy, odcinek zaś prostopadły do płaszczyzny rzutów ulegnie s k r ó c e n i u, względnie w y d ł u ż e n i u, zależnie od kierunku promieni rzutujących. Zwykle dobieramy taki ich kierunek, żeby nastąpiło skrócenie do $^1/_2$, $^1/_3$ danej długości. Oprócz tego, jak to łatwo zauważyć, w rzutowaniu ukośnem odcinek, o którym mówiliśmy, przestanie być prostopadłym do pierwszego, czyli figura, złożona w rzeczywistości z dwóch prostopadłych do siebie odcinków,



Rys. 214.

ulegnie zniekształceniu, mianowicie kąt prosty przestanie nim być i figura dozna tak zw. s k r z y w i e n i a: zamiast kąta prostego otrzymamy pewien kąt α (najczęściej bierze się $\alpha=45^0$, 30^0 albo 60^0).

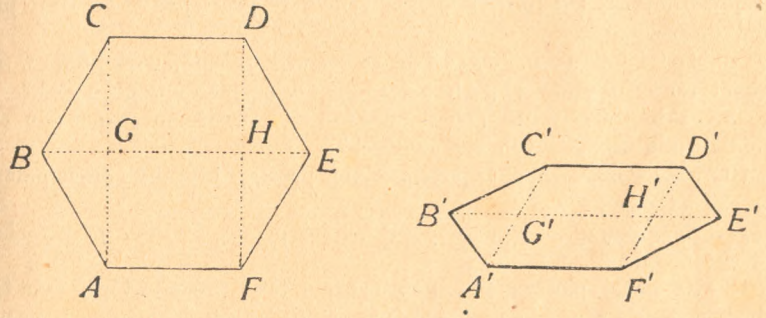


Rys. 215.

Załączony rysunek 214 daje właśnie obraz figury $ABCD$ w rzucie ukośnym: odcinek AB zmianie nie uległ i na nim punkt C, odcinek CD doznał skrócenia ($d=^1/_2$), a kąt skrzywienia ($\alpha=45^0$).

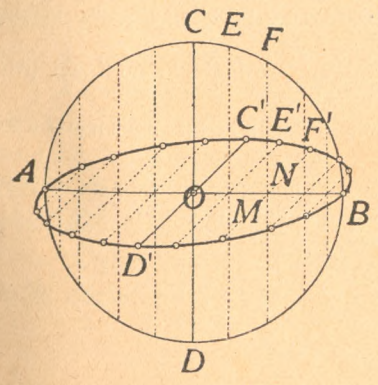
Mając te wiadomości na uwadze, możemy się pokusić o przedstawienie danej figury w rzucie ukośnym, np. kwadratu (rys. 215) ustawionego tak, że jego podstawa jest równoległa do płaszczyzny rzutów, a drugi bok jest do niej prostopadły, biorąc $d = ^1/_2$ i $\alpha = 45^0$.

Jeżeli dana figura jest bardziej złożona, staramy się przedewszystkiem poprowadzić w niej odcinki w dwóch zasadniczych kierunkach (poziomym i pionowym) i według ich rzutów wykreślić rzut figury. Np. rys. 216 przedstawia rzut ukośny sześciokąta



Rys. 216.

o równych bokach i kątach (foremnego). Odcinki AF, CD i BE, jako równoległe do płaszczyzny rzutów, zmianie nie uległy, natomiast prostopadłe do tej płaszczyzny odcinki AC i DF doznały skrócenia ($d=^1/_2$) i skrzywienia ($\alpha=60^0$).



Rys. 217.

Na tej samej zasadzie można otrzymać rzut ukośny koła (rys. 217). W tym celu prowadzimy w niem średnice poziomą AB i pionową CD, następnie szereg cięciw, prostopadłych do AB i wykreślamy ich rzuty ($d=^1/_2$; $\alpha=45^0$); łącząc punkty C', E', F' i t. d., otrzymujemy *elipsę*, jako rzut ukośny koła.

§ 43. Ćwiczenia.

1. Dowieść, że dwie płaszczyzny, równoległe do trzeciej, są do siebie równoległe.

2. Dowieść, że prosta równoległa do dwu przecinających się płaszczyzn, jest równoległa do ich linji przecięcia.

3. Dowieść, że prosta przecina dwie równoległe płaszczyzny pod tym samym kątem.

4. Z wewnętrznego punktu kąta dwuściennego poprowadzono prostopadłe do jego ścian. Dowieść, że kąt między temi prostopadłemi jest spełnieniem kąta linjowego, odpowiadającego danemu dwuściennemu.

5. Dowieść, że środki wszystkich boków skośnego czworokąta leżą na jednej płaszczyźnie i są wierzchołkami równoległoboku.

6. Dowieść, że rzuty dwu równoległych odcinków są równoległe.

7. Dana jest płaszczyzna i prostopadła do niej prosta. Dowieść, że rzut tej prostej na jakąkolwiek płaszczyznę jest prostopadły do linji przecięcia obu płaszczyzn.

8. Jakie jest miejsce geometryczne punktów w przestrzeni równo odległych od trzech punktów danych?

9. Jakie jest miejsce geom. punktów w przestrzeni jednakowo oddalonych od dwu przecinających się prostych?

10. Przez dany punkt poprowadzić prostą, któraby przecinała dwie proste skośne dane.

11. Na danej płaszczyźnie poprowadzić prostą, któraby przecinała dwie proste skośne dane.

12. Na danej płaszczyźnie poprowadzić taką prostą, której punkty leżą w jednakowej odległości od dwóch punktów danych, położonych poza płaszczyzną.

13. Dane są trzy punkty w przestrzeni. Na danej płaszczyźnie znaleźć taki punkt, któryby był jednakowo od nich oddalony.

14. Znaleźć miejsce geom. punktów w przestrzeni, jednakowo oddalonych od dwu przecinających się płaszczyzn.

15. Dane są dwie przecinające się płaszczyzny i pewien punkt w przestrzeni. Przez ten punkt poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do każdej z dwu danych.

16. Przez daną prostą przesunąć płaszczyznę równoległą do innej prostej danej.

17. Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej.

18. Dana jest płaszczyzna i punkt poza nią. Znaleźć miejsce geometryczne punktów na tej płaszczyźnie, których odległość od danego punktu jest a.

19. Kąt dwuścienny podzielić na połowy.

ROZDZIAŁ VIII.

Geometryczna proporcjonalność odcinków.

§ 44. Odcinki spółmierne i niespółmierne. Twierdzenie Talesa dla odcinków spółmiernych.

254. **Określenia.** Wiemy z arytmetyki, że jeżeli stosunek dwu liczb a i b jest równy stosunkowi dwu innych c i d, to możemy te dwa stosunki połączyć znakiem $=$, pisząc:

$$a : b = c : d$$

i powiedzieć, że dane cztery liczby tworzą proporcję.

Proporcja ta wyraża, że pierwsza z danych liczb jest tyle razy większa (względnie mniejsza) od drugiej, ile razy trzecia jest większa (względnie mniejsza) od czwartej. Tak np. cztery liczby: 15, 5, 12 i 4 tworzą proporcję:

$$15 : 5 = 12 : 4,$$

dlatego że stosunek $15 : 5$ jest równy stosunkowi $12 : 4$.

Spróbujemy teraz tę własność liczb rozciągnąć na wielkości geometryczne, a przedewszystkiem na odcinki.

Rozumując analogicznie do tego, co było powiedziane o liczbach, powinniśmy nazwać cztery odcinki proporcjonalnemi wtedy, kiedy stosunek pierwszych dwóch będzie równy stosunkowi ostatnich dwu odcinków. Ale jak odnaleźć stosunek dwu odcinków?

Jeżeli mamy dwa odcinki a i b i pierwszy z nich jest większy od drugiego, to przedewszystkiem może się zdarzyć, że odejmując odcinek b od a tyle razy, ile się to da zrobić, przekonamy się, że 1-szy odcinek zawiera w sobie k razy odcinek 2-gi, wtedy możemy powiedzieć, że stosunek $a : b = k$ (liczba całkowita).

Gdyby to nie nastąpiło, może się zdarzyć, że pewna m-ta część odcinka b pomieści się l razy w odcinku a, wtedy powiadamy, że

$$a : b = \frac{l}{m} \text{ (liczba ułamkowa)}$$

i tę część nazwiemy wspólną miarą odcinków danych.

A zatem wspólną miarą dwóch odcinków nazywamy taki odcinek, który w obydwu danych mieści się całkowitą liczbę razy.

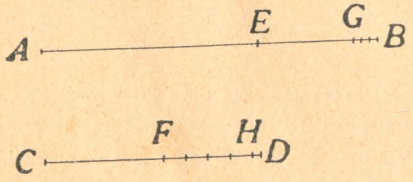
Jeżeli np. okaże się, że odcinek b podzieliliśmy na 10 części równych, a odcinek a mieści tych części 17, to wtedy

$$a : b = \frac{17}{10} = 1{,}7$$

i wspólną miarą tych odcinków jest $\frac{1}{10}\, b$.

Jak odnaleźć tę część jednego z 2-ch danych odcinków, która będzie ich wspólną miarą, poucza następujące **zadanie:**

Odnaleźć wspólną miarę dwu odcinków.



Rys. 218.

Niech będą dane dwa odcinki: AB i CD (rys. 218), o których wiemy zgóry, że posiadają wspólną miarę. Odmierzamy mniejszy z nich (CD) na większym (AB) tyle razy, ile się to da zrobić (1 raz), otrzymujemy pewną resztę EB:

$$AB = CD + EB \quad . \quad . \quad (1)$$

Odmierzmy EB na odcinku CD tyle razy, ile się to da zrobić (1 raz), otrzymamy nową resztę FD:

$$CD = EB + FD \quad . \quad . \quad (2)$$

Tę nową resztę odmierzamy na 1-ej, t. j. na EB (1 raz), otrzymamy nową resztę GB:

$$EB = FD + GB \quad . \quad . \quad (3)$$

Odmierzmy znowu GB na FD (4 razy), otrzymamy resztę HD:

$$FD = 4GB + HD \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

i wreszcie odmierzmy HD na GB (3 razy) już bez reszty:

$$GB = 3HD \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wspólną miarą danych odcinków AB i CD będzie ostatnia reszta HD.

Zobaczmy teraz, ile razy HD pomieści się w każdym z danych odcinków, w tym celu podstawmy wartość GB do równości (4):

$$FD = 12HD + HD = 13HD.$$

Z równości (3) otrzymamy:

$$EB = 13HD + 3HD = 16HD,$$

z równości (2):

$$CD = 16HD + 13HD = 29HD,$$

wreszcie z równości (1):

$$AB = 29HD + 16HD = 45HD.$$

Widzimy, że wspólną miarą odcinków danych jest

$$HD = \frac{1}{29}\, CD,$$

a ponieważ

$$AB = 45 \cdot \frac{1}{29}\, CD,$$

więc

$$AB : CD = \frac{45}{29}.$$

Wskazany sposób postępowania dla odnalezienia wspólnej miary danych odcinków znany jest pod nazwą *algorytmu Euklidesa.*

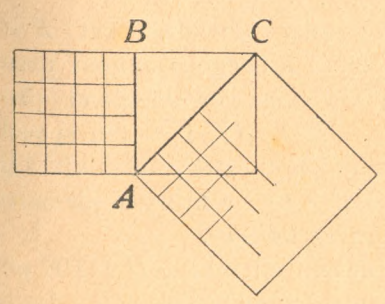
Uwaga. Algorytmem nazywamy regułę rachunkową, którą jednolicie stosujemy w każdym poszczególnym przypadku dla otrzymania rozwiązania danego zagadnienia, która jednak nie daje ogólnego wzoru na rozwiązanie.

Wyraz „algorytm" jest zniekształconem arabskiem przezwiskiem uczonego z IX w. po Chr. *Muhameda-ibn-Musa*, zwanego *Alchwarizmi* (= mąż z Chorizmji—obecnej Chiwy), który był pochodzenia perskiego, pisał jednak w języku arabskim.

255. Mówiąc poprzednio o liczbie części, na które należy podzielić mniejszy odcinek dany dla otrzymania wspólnej miary, zgóry zakładaliśmy, że taka liczba (m) istnieje. Przekonamy się jednak zaraz, że możemy nie natrafić nigdy na taką liczbę (powiększając wciąż m), ażeby można było osiągnąć pożądany cel, t. j. znaleźć taki odcinek, któryby w obu danych mieścił się całkowitą liczbę razy.

Dwa odcinki, które posiadają wspólną miarę, nazywamy spółmiernemi, w przeciwnym razie — niespółmiernemi.

Twierdzenie. Bok kwadratu i jego przekątna są niespółmierne.



Rys. 219.

Mamy dany kwadrat $ABCD$ (rys. 219), którego bok nazwijmy a, a przekątną b. Przypuśćmy, że odcinki a i b są spółmierne i wspólną miarą niech będzie pewien odcinek k, który na boku kwadratu mieści się m razy, a na przekątnej n razy, wtedy będzie:

$$a = m.k,$$
$$b = n.k.$$

Jeżeli teraz na przekątnej AC i boku AB zbudujemy kwadraty, to

prowadząc w tych kwadratach przez punkty podziału równoległe, podzielimy 1-szy kwadrat na n^2 małych równych sobie kwadracików (nazwijmy je p), a 2-gi na m^2 takich samych kwadracików.

Stosując teraz do trójkąta ABC twierdzenie Pitagorasa, możemy powiedzieć, że

$$\text{kw. } (AC) = \text{kw. } (AB) + \text{kw. } (BC),$$

a że $AB = BC$:

$$\text{kw. } (AC) = 2 \text{ kw. } (AB),$$

stąd zaś:

$$n^2 p = 2m^2 p, \text{ czyli}$$
$$n^2 = 2m^2.$$

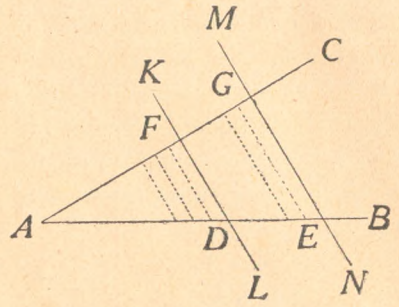
Łatwo teraz będzie udowodnić, że taka równość istnieć nie może:

Liczba całkowita n może być albo parzysta, albo nieparzysta; jeżeli jest nieparzysta, to jakakolwiek będzie liczba m, lewa strona równości nie będzie zawierała wcale czynnika 2, który wchodzi w skład prawej; jeżeli zaś liczba n jest parzysta, to n^2 zawiera czynnik 2 parzystą liczbę razy, czego być nie może z prawej strony równości.

A więc nasze przypuszczenie, że istnieje wspólna miara dla AB i AC, musi upaść.

256. Widzimy, że, chcąc oprzeć pojęcie proporcjonalności odcinków na ich stosunku, musimy zgóry wiedzieć, z jakiemi odcinkami mamy do czynienia: spółmiernemi czy niespółmiernemi.

Nie przesądzając narazie sprawy, czy może być mowa o stosunku dwóch odcinków, nie posiadających wspólnej miary, poznamy naprzód pewną ważną własność odcinków spółmiernych.



Rys. 220.

Weźmy dowolny kąt BAC (rys. 220), którego ramiona przecięto dwiema równoległemi prostemi KL i MN i w ten sposób otrzymaliśmy cztery odcinki: AD, DE, AF i FG, z których pierwsze dwa są *spółmierne*.

Jeżeli odcinki AD i DE posiadają wspólną miarę, to odmierzając ją na każdym, możemy odnaleźć stosunek tych odcinków.

Niech ta wspólna miara w odcinku AD pomieści się l razy, a w odcinku DE—n razy, wtedy możemy powiedzieć, że

$$\frac{AD}{DE} = \frac{l}{n}.$$

Jeżeli teraz przez punkty podziału poprowadzimy równoległe do KL i MN, to odcinek AF podzieli się na l równych sobie części, a FG na n takich samych części, a zatem

$$\frac{AF}{FG} = \frac{l}{n}.$$

A zatem będziemy mieli

$$AD : DE = AF : FG,$$

to znaczy, że otrzymaliśmy na ramionach danego kąta cztery odcinki proporcjonalne.

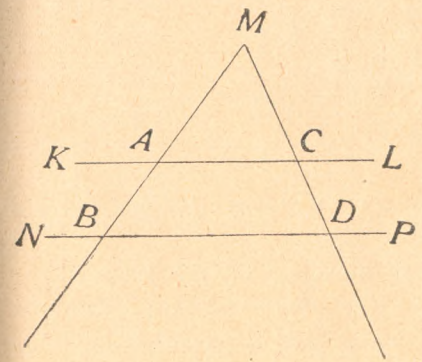
Poznaliśmy ważne twierdzenie, znane pod nazwą **twierdzenia Talesa:**

jeżeli dwie równoległe przecinają ramiona kąta, to odcinki, przez nie wyznaczone, są proporcjonalne.

Pamiętać oczywiście należy o zastrzeżeniu, że odcinki, odmierzone na jednem ramieniu kąta, są spółmierne.

§ 45. Geometryczna definicja odcinków proporcjonalnych. Własności proporcji między odcinkami.

257. Powracając teraz do zagadnienia o istnieniu odcinków proporcjonalnych, niezależnie od tego, czy ich stosunek może być znaleziony, musimy podać takie ich określenie, któreby dotyczyło zarówno odcinków spółmiernych, jak niespółmiernych. Biorąc za punkt wyjścia twierdzenie Talesa, przyjmiemy następujące **określenie:**



Rys. 221.

cztery odcinki nazywać będziemy proporcjonalnemi, jeżeli te odcinki lub im równe można otrzymać parami na ramionach kąta, przecinając je dwiema równoległemi prostemi.

Więc np. jeżeli mamy cztery odcinki: a, b, c i d tego rodzaju, że są kolejno równe odcinkom: MA

i AB oraz MC i CD*) (rys. 221), otrzymanym na ramionach kąta M przez przecięcie ich dwiema równoległemi KL i NP, to powiadamy, że dane odcinki są proporcjonalne i piszemy symboliczną proporcję:

$$a, b \Asymp c, d$$

czytając: odcinek a tak się ma do odcinka b, jak odcinek c do d.

Dane odcinki, tworzące proporcję, nazywać będziemy jej wyrazami, z nich I i IV — skrajnemi, II i III — średniemi; wyrazy I i II tworzą jednę (lewą) stronę, III i IV — drugą (prawą) stronę proporcji.

Proporcjonalność możemy rozszerzyć na większą liczbę par odcinków (nie tylko na dwie), np. możemy napisać proporcję:

$$a, b, c \Asymp a', b', c',$$

rozumiejąc, że odcinki a, b, c są odmierzone na jednem ramieniu kąta, odcinki zaś a', b', c' otrzymano na drugiem ramieniu, przecinając je równoległemi prostemi, poprowadzonemi przez końcowe punkty odcinków 1-go ramienia.

258. **O sposobach przestawiania wyrazów proporcji.** Wprowadziwszy pojęcie proporcjonalności geometrycznej, wykażemy, że ta proporcja, geometrycznie pojęta (nazwiemy ją dla skrócenia „odcinkową"), podlega tym samym prawom, które rządzą wyrazami proporcji liczbowej.

Wiadomo z arytmetyki, że mając proporcję liczbową

$$1)\ a : b = c : d,$$

można przestawieniem wyrazów otrzymać nowe proporcje:

$$2)\ b : a = d : c,$$
$$3)\ c : d = a : b,$$
$$4)\ d : c = b : a,$$
$$5)\ a : c = b : d,$$
$$6)\ c : a = d : b,$$
$$7)\ d : b = c : a,$$
$$8)\ b : d = a : c.$$

Łatwo jednak spostrzec, że wystarczy utworzyć proporcje: 2), 3) i 5), żeby otrzymać pozostałe.

Istotnie: 4) powstaje w taki sam sposób z 3), jak 2) z 1), — mianowicie, przez przestawienie wyrazów każdego stosunku. Proporcja 6) powstaje z 5) znowu w taki sam sposób, również 8) z 7), wreszcie 7) z 6), jak 3) z 1) — przez przestawienie stosunków.

*) Inaczej: MA i MB oraz MC i MD.

259. **Twierdzenie.** W każdej proporcji odcinkowej można przestawić wyrazy następującemi sposobami:

1°. przestawić wyrazy w każdej z dwóch stron proporcji.

2°. przestawić obie strony proporcji.

3°. przestawić wyrazy średnie.

Dowód. 1°. Jeżeli jest dana proporcja odcinkowa:

$$a, b \Asymp c, d,$$

to na zasadzie definicji odcinków proporcjonalnych będzie również prawdziwa proporcja:

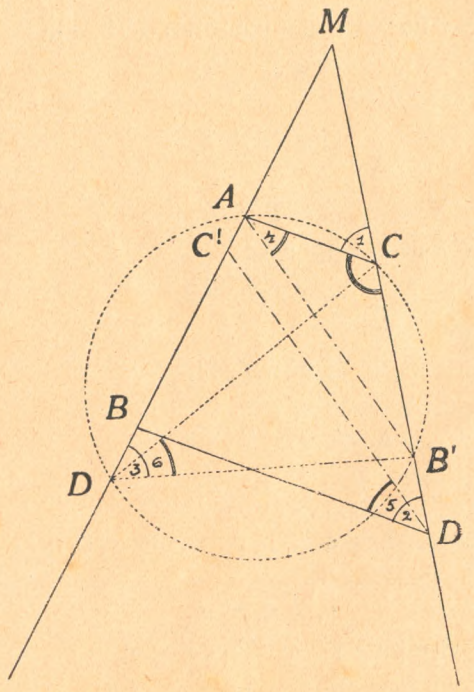
$$b, a \Asymp d, c.$$

2°. Jeżeli jest dana proporcja:

$$a, b \Asymp c, d,$$

to znowu z definicji odcinków proporcjonalnych wynikać będzie, że również napisać można proporcję:

$$c, d \Asymp a, b.$$



Rys. 222

3°. Mamy cztery odcinki: a, b, c i d, między któremi zachodzi proporcja:

$$a, b \fallingdotseq c, d.$$

Odmierzmy na jednem ramieniu dowolnego kąta M (rys. 222) odcinki $MA = a$ i $MB = b$, na drugiem $MC = c$ i $MD = d$, wtedy $AC \parallel BD$.

Odetnijmy teraz $MC' = c$ i $MB' = b$ i dowiedźmy prawdziwości proporcji:

$$MA, MC' \fallingdotseq MB', MD,$$

t. j.

$$a, c \fallingdotseq b, d,$$

innemi słowy udowodnijmy, że $AB' \parallel C'D$. Ponieważ $AC \parallel BD$, więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, ale odcinając $MD' = d$ i łącząc D' i B', widzimy, że $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ (patrz 2°), a zatem:

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3,$$

stąd zaś mamy, że w czworokącie $D'ACB'$ kąt ACB' jest spełnieniem kąta 3, więc na tym czworokącie można opisać koło.

W takim razie

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6,$$

jako wpisane, oparte na tym samym łuku CB', ale

$$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 5,$$

więc

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5,$$

a stąd już

$$AB' \parallel C'D,$$

co dowodzi prawdziwości proporcji:

$$a, c \fallingdotseq b, d.$$

Ogólniej: z zależności

$$a, b, c \fallingdotseq a', b', c'$$

wynikać będzie:

$$a, a' \fallingdotseq b, b' \fallingdotseq c, c'$$

i nawzajem.

260. **Twierdzenie.** Z danej proporcji między odcinkami:

$$a, b \fallingdotseq c, d$$

zawsze można utworzyć proporcje:

$$(a \pm b), b \fallingdotseq (c \pm d), d,$$
$$(a \pm b), a \fallingdotseq (c \pm d), c.$$

Dowód oczywisty.

261. **Twierdzenie.** Z dwu proporcyj:

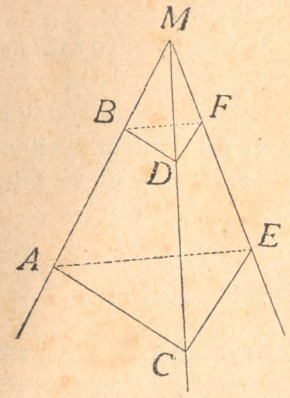
$$a, b \fallingdotseq c, d$$

i

$$c, d \fallingdotseq e, f$$

zawsze można utworzyć proporcję:

$$a, b \fallingdotseq e, f.$$



Rys. 223.

Dowód. Ramiona dowolnego kąta AMC (rys. 223) przecięliśmy równoległemi AC i BD i otrzymaliśmy cztery proporcjonalne odcinki: $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$, i $MD = d$.

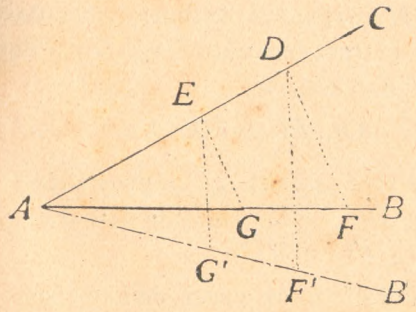
Wykreślmy kąt CME i poprowadźmy $CE \parallel DF$, które wyznaczają znowu cztery odcinki proporcjonalne: $MC = c$, $MD = d$, $ME = e$ i $MF = f$.

Ponieważ na zasadzie twierdzenia Desargues'a odcinki BF i AE są równoległe, więc będzie

$$MA, MB \fallingdotseq ME, MF, \text{ czyli}$$
$$a, b \fallingdotseq e, f.$$

262. W proporcji $a, b \fallingdotseq c, d$ każdy z odcinków nazywa się czwartym proporcjonalnym do trzech pozostałych; przekonamy się zaraz, że mając trzy dane odcinki, zawsze można będzie znaleźć czwarty, któryby z danemi trzema tworzył proporcję.

Zadanie. Znaleźć odcinek czwarty proporcjonalny do trzech odcinków danych.



Rys. 224.

Dane są trzy odcinki: a, b i c.

Wykreślmy dowolny kąt BAC (rys. 224) i odmierzmy od wierzchołka: $AD = a$, $AE = b$ i $AF = c$. Jeżeli teraz połączymy punkt D z F, a przez E poprowadzimy równoległą do DF, to otrzymamy odcinek żądany $AG = x$, dlatego że z określenia proporcji mamy wprost:

$$a, b \fallingdotseq c, x.$$

Zachodzi teraz pytanie: czy otrzymany odcinek jest jedyny?

Że na ramieniu AB wziętego przez nas kąta innego odcinka

czwartego proporcjonalnego nie otrzymamy, wynika stąd, że z punktu E można poprowadzić tylko jedną równoległą do DF. Czy jednak wykreślając inny kąt, nie otrzymamy odcinka różnego od AG?

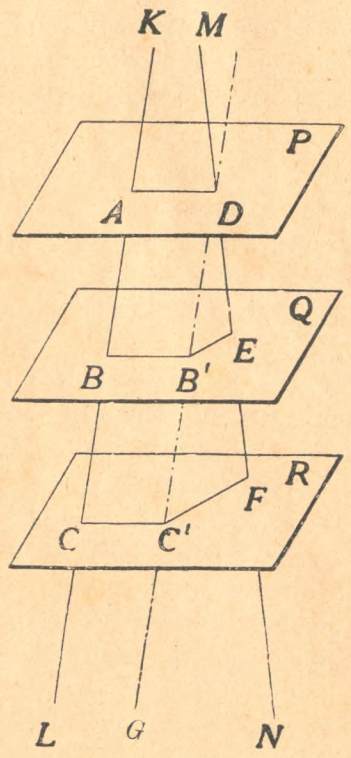
W tym celu poprowadźmy prostą AB', odmierzmy na niej $AF' = c$ i przez punkt E poprowadźmy równoległą do DF', wtedy powinno być $a, b \fallingdotseq c, AG'$.

Widzimy, że musi być $AG' = AG$ (dlaczego?).

Wniosek. Do trzech odcinków danych można znaleźć czwarty proporcjonalny, ale tylko jeden.

Uwaga. Jeżeli dana jest proporcja $a, b \fallingdotseq b, c$, to odcinek c nazywa się trzecim proporcjonalnym do dwu danych a i b; zaś odcinek b nazywamy średnim-proporcjonalnym między dwoma danemi: a i c.

§ 46. Zastosowania twierdzenia Talesa.



Rys. 225.

263. **Twierdzenie.** Dwie jakiekolwiek proste w przestrzeni, przecięte szeregiem równoległych płaszczyzn, dzielą się na odcinki proporcjonalne.

Dwie proste w przestrzeni mogą się przecinać, mogą być do siebie równoległe, wreszcie mogą być skośne. Weźmy ostatni przypadek, jako najogólniejszy.

Przetnijmy dwie proste skośne KL i MN (rys. 225) kilkoma równoległemi płaszczyznami: P, Q, R i t. d., mamy dowieść, że

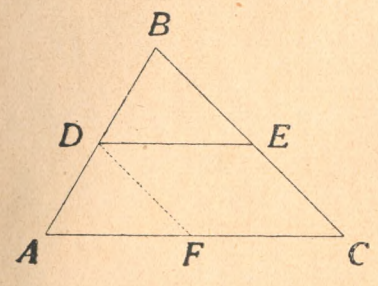
$$AB, BC \fallingdotseq DE, EF.$$

Przez punkt D poprowadźmy prostą $DG \parallel KL$, wtedy będzie $AB = DB'$, $BC = B'C'$.

Jeżeli teraz przez dwie przecinające się proste DG i MN przesuniemy płaszczyznę, to jej przecięcia z płaszczyznami Q i R będą do siebie równoległe: $B'E \parallel C'F$, a więc stosując twierdzenie Talesa do kąta GDN, możemy napisać

$$DB', B'C' \fallingdotseq DE, EF \text{ czyli}$$
$$AB, BC \fallingdotseq DE, EF.$$

264. **Twierdzenie.** Prosta, równoległa do jednego z boków trójkąta, odcina od niego trójkąt, którego boki są proporcjonalne do boków trójkąta danego.



Rys. 226.

Dany jest trójkąt ABC (rys. 226), którego dwa boki przecięto prostą DE równoległą do AC; mamy dowieść, że

$$AB, BC, AC \fallingdotseq DB, BE, DE.$$

Stosując twierdzenie Talesa do odcinków na ramieniu kąta B, mamy

$$AB, DB \fallingdotseq BC, BE.$$

Jeżeli teraz poprowadzimy $DF \parallel BC$, to na ramionach kąta A otrzymamy odcinki proporcjonalne:

$$AB, DB \fallingdotseq AC, FC,$$

ale $FC = DE$, więc

$$AB, DB \fallingdotseq AC, DE$$

czyli

$$AB, DB \fallingdotseq BC, BE \fallingdotseq AC, DE$$

albo inaczej:

$$AB, BC, AC \fallingdotseq DB, BE, DE.$$

Znaczy to, że jeżeli na jednem z ramion dowolnego kąta ułożymy boki AB, BC i AC jednego trójkąta, to boki BD, BE i DE drugiego otrzymamy na 2-iem ramieniu, przecinając te ramiona równoległemi prostemi.

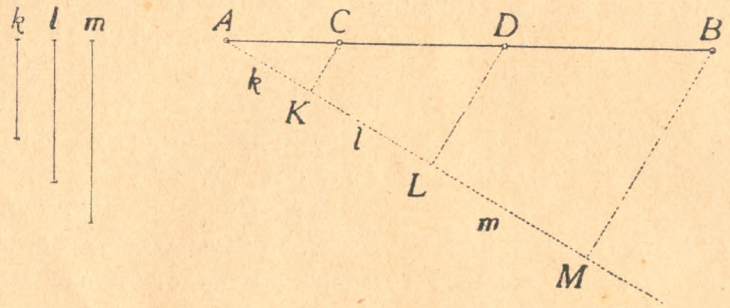
Uwaga. Można z łatwością wykazać, że twierdzenie pozostanie prawdziwe i w takim przypadku, kiedy prosta DE przecinać będzie nie boki danego trójkąta, lecz ich przedłużenia.

Wtedy odcinek BD otrzymamy na przedłużeniu boku AB, a odcinek BE na przedłużeniu BC.

265. **Zadanie.** Podzielić odcinek na części proporcjonalne do odcinków danych.

Mamy dany odcinek AB oraz trzy odcinki: k, l i m (rys. 227). Wyprowadźmy z punktu A pod dowolnym kątem prostą i odmierzmy

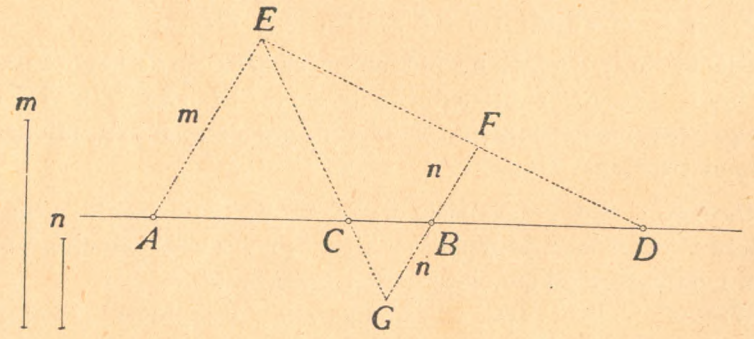
na niej, począwszy od A, trzy kolejne odcinki: k, l i m. Koniec M ostatniego odcinka łączymy z punktem B, a przez pozostałe punkty podziału prowadzimy równoległe do MB. Odcinek AB został podzielony w punktach C i D na trzy żądane części.



Rys. 227.

266. **Zadanie.** Na prostej dane są dwa punkty, znaleźć na niej taki punkt, którego odległości od dwu danych są proporcjonalne do odcinków m i n.

Na prostej mamy dane dwa punkty: A i B oraz dwa odcinki: m i n, zakładając $m > n$ (rys. 228).



Rys. 228.

Zadanie możnaby rozwiązać tak samo, jak poprzednie, prowadząc przez punkt A dowolną prostą i odmierzając na niej odcinki m i n, korzystniej jednak zastosować konstrukcję następującą:

Przez punkty A i B poprowadźmy dwie równoległe i odetnijmy na nich: $AE = m$ i $BF = BG = n$.

Łącząc punkty E i G, otrzymamy trójkąt AEC, w którym prosta BG równoległa do AE przecina przedłużenia pozostałych 2-ch boków, więc

$$AC,\ CB \doteqdot AE,\ BG \doteqdot m,\ n$$

a zatem punkt C jest żądany.

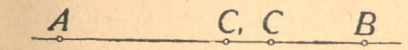
Łącząc punkty E i F, otrzymamy w przecięciu z prostą AB punkt D, który również będzie żądany (dlaczego?).

Znaleźliśmy więc dwa punkty, które zadośćczynią warunkowi:

$$AC,\ CB \doteqdot AD,\ BD \doteqdot m,\ n.$$

Można udowodnić, że więcej takich punktów na danej prostej być nie może.

Istotnie: przypuśćmy, że istnieje jeszcze jeden taki punkt; może się on znajdować: albo 1) pomiędzy punktami A i B, albo 2) pomiędzy B i D, albo wreszcie 3) zewnątrz odcinka AD.



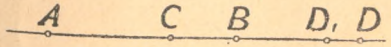
Rys. 229.

Przypuszczenie 1) upada, dlatego że, wyobrażając sobie pewien punkt C_1 bliżej położony od A, niż punkt C (rys. 229), mielibyśmy $AC_1 < AC$ i $BC_1 > BC$, a więc nie mogłaby istnieć proporcja:

$$AC_1,\ BC_1 \doteqdot AC,\ BC \doteqdot m,\ n.$$

Przypuśćmy dalej, że żądany punkt leży pomiędzy B i D i jest nim D_1 (rys. 230), wtedy mielibyśmy proporcję:

$$D_1A,\ D_1B \doteqdot DA,\ DB$$



a stąd

$$(D_1A - D_1B),\ D_1B \doteqdot (DA - DB),\ DB$$

czyli

$$AB,\ D_1B \doteqdot AB,\ DB,$$

a więc $DB_1 = DB$,

a zatem przypuszczenie 2) również upada.

Rys. 230.

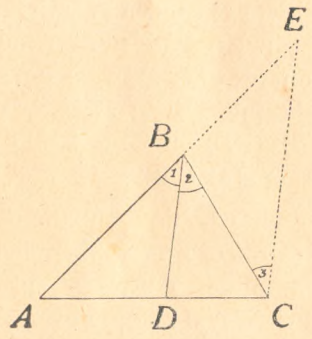
Przypuśćmy wreszcie, że żądany punkt leży na jednem z przedłużeń odcinka AB. Łatwo się przekonać, że i to przypuszczenie, podobnie do 1), upaść musi.

Widzimy tedy, że żądane punkty są tylko dwa, a mianowicie C i D.

O punkcie C mówimy, że dzieli odcinek AB wewnętrznie na części proporcjonalne do m i n, punkt D zaś dzieli odcinek AB zewnętrznie.

Wogóle o punktach C i D mówi się, że dzielą odcinek AB harmonicznie i para punktów C i D nazywa się harmonicznie sprzężoną z parą danych punktów A i B.

Uwaga. Sposób rozwiązania, który właśnie poznaliśmy, podał znany aleksandryjski uczony *Pappus* z 3-go wieku po Chr.



Rys. 231.

267. **Twierdzenie.** Dwusieczna jednego z kątów trójkąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta.

Mamy dany trójkąt ABC (rys. 231), podzielmy w nim kąt B na połowy dwusieczną BD, należy dowieść, że

$$AD,\ DC \Subset AB,\ BC.$$

Z punktu C wyprowadźmy równoległą do BD aż do przecięcia się z przedłużeniem boku AB w punkcie E. Wtedy mamy

$$AD,\ DC \Subset AB,\ BE.$$

Ale że

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2,$$
$$\sphericalangle E = \sphericalangle 1,$$

a kąt $2 = \sphericalangle 1$, więc

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle E,$$

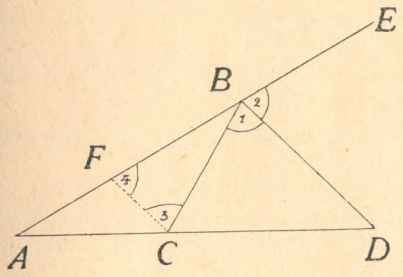
w takim razie $BE = BC$.

Podstawiając w otrzymanej poprzednio proporcji zamiast BE równy mu odcinek BC, mamy

$$AD,\ DC \Subset AB,\ BC,$$

c. b. d. d.

268. **Twierdzenie.** Dwusieczna jednego z kątów zewnętrznych trójkąta dzieli zewnętrznie bok przeciwległy na dwa odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta.



Rys. 232.

Z wierzchołka B trójkąta ABC (rys. 232) poprowadzono dwusieczną BD, należy dowieść, że

$$AD,\ CD \Subset AB,\ BC.$$

Poprowadźmy $CF \parallel BD$, wtedy

$$AD,\ CD \Subset AB,\ FB.$$

Łatwo jednak przekonać się, że $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, więc $BF = BC$, a zatem

$$AD,\ CD \Subset AB,\ BC,$$

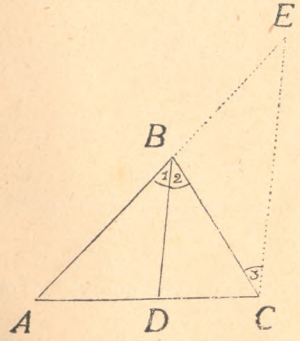
c. b. d. d.

Wniosek. Jeżeli z którego-kolwiek wierzchołka trójkąta poprowadzimy dwusieczne kąta wewnętrznego i zewnętrznego, to one podzielą bok przeciwległy harmonicznie na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta.

269. **Twierdzenie odwrotne.** Prosta, wyprowadzona z wierzchołka jednego z kątów trójkąta, która dzieli bok przeciwległy proporcjonalnie do dwóch przyległych boków, jest dwusieczną tego kąta.

Ta prosta będzie dwusieczną kąta wewnętrznego w trójkącie, jeżeli podzieliła bok przeciwległy wewnętrznie.

Mamy teraz daną proporcję (rys. 233) $AD,\ DC \Subset AB,\ BC$, pragniemy dowieść, że BD jest dwusieczną kąta B.



Rys. 233.

Wykreślając, jak poprzednio, $CE \parallel BD$, otrzymamy

$$AD,\ DC \Subset AB,\ BE,$$

a ponieważ do trzech danych odcinków istnieje tylko jeden czwarty proporcjonalny, więc $BE = BC$, a stąd $\sphericalangle 3 = \sphericalangle E$, a więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, c. b. d. d.

W podobny sposób możemy dowieść o dwusiecznej kąta zewnętrznego.

§ 47. Ćwiczenia.

1. Podać inną konstrukcję zadania (ust. 262) o odcinku czwartym proporcjonalnym do trzech odcinków danych.

2. Udowodnić, że twierdzenie Talesa pozostaje w swojej mocy i wtedy, kiedy jedna z dwóch równoległych prostych przecina ramiona danego kąta, a druga—ich przedłużenia.

3. Dany odcinek przedłużyć o tyle, żeby odcinek dany i jego przedłużenie były proporcjonalne do odcinków m i n.

4. Odcinek przedłużyć o tyle, żeby cały otrzymany odcinek i przedłużenie danego były proporcjonalne do odcinków m i n.

5. Dany odcinek podzielić na takie dwie części, aby ich suma i różnica były proporcjonalne do odcinków m i n.

6. Dana jest prosta i punkt poza nią. Znaleźć inny punkt taki, aby jego odległość od danego punktu i od prostej danej były proporcjonalne do odcinków m i n, a suma tych odległości była równa odcinkowi k.

7. Znaleźć miejsce geometryczne takich punktów, w których wszystkie odcinki, łączące punkt dany z punktami prostej danej, dzielą się proporcjonalnie do m i n.

8. Znaleźć dwa odcinki, mając ich sumę, jeżeli wiadomo, że są one proporcjonalne do odcinków m i n.

9. Znaleźć dwa odcinki proporcjonalne do m i n, mając ich różnicę.

10. Przez punkt, położony wewnątrz kąta, poprowadzić między jego ramionami taki odcinek, któryby w tym punkcie był podzielony na dwie części proporcjonalne do m i n.

11. Dane są trzy półproste o wspólnym początku i pomiędzy niemi punkt. Przez ten punkt poprowadzić między skrajnemi półprostemi odcinek w taki sposób, aby został on przez trzecią półprostą podzielony na części proporcjonalne do m i n.

12. Dowieść geometrycznie, że, jeżeli między odcinkami a, b, c i d istnieje proporcja:

$$a, b \triangleq c, d,$$

to będą prawdziwe proporcje:

$$ak, b \triangleq ck, d,$$
$$a, bk \triangleq c, dk,$$
$$a^k, bk \triangleq c, d,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

13. Przez dany punkt wewnątrz kąta poprowadzić prostą w taki sposób, aby odcinki, przez nią wyznaczone na ramionach kąta, były proporcjonalne do odcinków m i n.

14. To samo dla punktu zewnątrz kąta.

15. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, których odległości od ramion danego kąta są proporcjonalne do odcinków m i n.

16. Wewnątrz trójkąta znaleźć punkt, którego odległości od boków trójkąta są proporcjonalne do odcinków k, l, m.

17. Dane są dwie proste, nie przecinające się na rysunku i punkt poza niemi. Przez ten punkt poprowadzić prostą, która musi przejść przez punkt przecięcia danych prostych (których przedłużać nie można).

18. Jakie będzie rozwiązanie zadania o podziale odcinka na części proporcjonalne do m i n (patrz 266), jeżeli $m = n$?

19. Dane są dwie proste i punkt poza niemi. Na jednej z tych prostych odnaleźć taki punkt, którego odległości od danego punktu i od drugiej prostej są sobie równe.

Wskazówka. Poprowadzić prostą przez punkt dany oraz przez punkt przecięcia się dwóch danych prostych i zastosować tw. Desargues'a.

20. Dane są dwie proste i punkt poza niemi. Na jednej z tych prostych odnaleźć taki punkt, którego odległości od danego punktu i od drugiej prostej są proporcjonalne do odcinków m i n.

21. Dany jest kąt i punkt wewnątrz niego. Na jednem z ramion odnaleźć taki punkt, którego odległości od punktu danego i od wierzchołka kąta są proporcjonalne do odcinków m i n.

22. Na jednym z boków trójkąta odnaleźć taki punkt, że dwa odcinki z niego poprowadzone: jeden prostopadle do jednego z pozostałych boków, a drugi równolegle do niego aż do spotkania się z trzecim bokiem, są proporcjonalne do odcinków m i n.

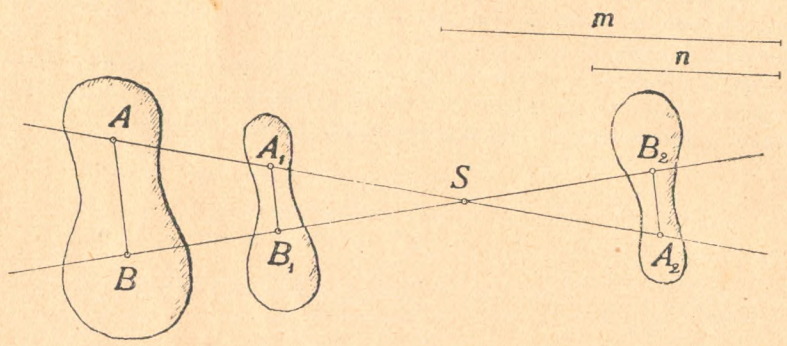
23. Na jednym z boków trójkąta wyznaczyć taki punkt, że odcinki prostych przez niego poprowadzonych równolegle do pozostałych boków trójkąta i zawarte wewnątrz niego, są proporcjonalne do odcinków m i n.

ROZDZIAŁ IX.

Jednokładność i podobieństwo.

§ 48. Definicja i budowanie figur jednokładnych.

270. **Określenia.** Dane są na płaszczyźnie: pewna figura F, punkt stały S oraz dwa odcinki m i n (rys. 234).



Rys. 234.

Połączmy dowolny punkt A tej figury z punktem S i znajdźmy odcinek czwarty proporcjonalny do trzech odcinków: m, n i SA, czyli taki odcinek SA_1, któryby zadośćczynił proporcji:

$$SA,\ SA_1 \doteqdot m,\ n.$$

Jak wiadomo, taki odcinek istnieje tylko jeden, więc jeżeli na SA, począwszy od S, odmierzymy SA_1, to wyznaczymy punkt A_1, odpowiadający punktowi A.

Obierzmy inny punkt figury danej, np. B, połączmy go z punktem S i znowu znajdźmy odcinek czwarty proporcjonalny do m, n i SB, czyli taki odcinek SB_1, któryby zadośćczynił proporcji:

$$SB,\ SB_1 \doteqdot m,\ n,$$

wyznaczymy na SB punkt B_1, odpowiadający punktowi B danej figury.

Jeżeli teraz wyobrazimy sobie, że dla każdego punktu figury danej znaleźliśmy wskazanym sposobem punkt mu odpowiadający, to zbiór otrzymanych punktów utworzy nową figurę F_1, która nazywa się jednokładną z figurą daną F względem pewnego stałego punktu S, który nosi wtedy nazwę środka jednokładności.

Odcinki SA, SB, SA_1 itd. nazywają się promieniami jednokładności.

Punkty A i A_1 albo B i B_1, które są położone na tym samym promieniu jednokładności, nazywają się punktami odpowiednimi figur jednokładnych.

Odcinki SA_1, SB_1 itd. moglibyśmy odmierzać nie na promieniach SA, SB..., ale na ich przedłużeniach, w ten sposób otrzymalibyśmy figurę F_2 jednokładną z daną F, ale położoną z przeciwnej strony środka S. Dlatego rozróżniamy jednokładność prostą (F i F_1) oraz odwrotną (F i F_2).

Łatwo spostrzec, że figury F_2 i F_1 są sobie równe, są one także symetrycznie położone względem środka S; wogóle można powiedzieć, że symetrja figur względem danego środka jest szczególnym przypadkiem jednokładności, mianowicie, kiedy odcinki dane m i n są sobie równe.

Jeżeli punkty A i B danej figury F połączymy odcinkiem AB, tak samo odpowiadające im punkty A_1 i B_1 figury F_1, to wtedy będzie $AB \parallel A_1B_1$ (dlaczego?) i oprócz tego

$$AB,\ A_1B_1 \doteqdot SA,\ SA_1 \doteqdot SB,\ SB_1 \doteqdot m,\ n.$$

271. Z tego, co było wyżej powiedziane, wynika, że dla każdej figury danej można znaleźć figurę z nią jednokładną, czyli przekształcić ją jednokładnie (wprost lub odwrotnie), spełniając następujące warunki:

1°. Dla każdego punktu jednej figury będzie wyznaczony odpowiedni punkt drugiej figury.

2°. Wszystkie promienie jednokładności, t. j. odcinki, łączące parami odpowiednie punkty figur, przechodzić będą przez punkt stały (środek jednokładności).

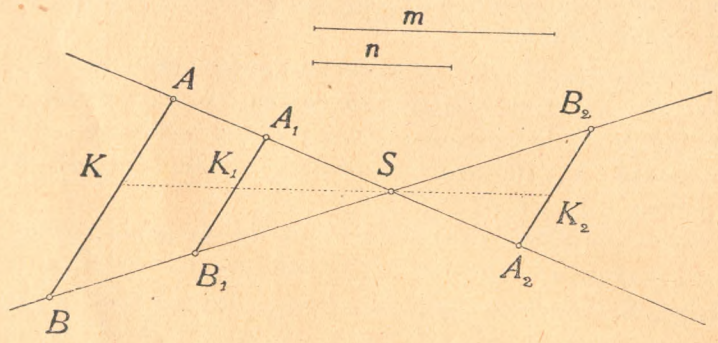
3°. Wszystkie promienie jednokładności będą proporcjonalne do dwu zgóry danych odcinków.

Wtedy, jak widzieliśmy:

odcinki, łączące parami odpowiednie punkty obu figur, będą do siebie równoległe i będą również proporcjonalne do dwu odcinków danych m i n.

272. **Twierdzenie.** Figura, jednokładna z odcinkiem, jest odcinkiem do niego równoległym.

Dany jest odcinek AB (rys. 235), środek jednokładności S, i dwa odcinki: m i n. Wiadomym już sposobem znajdźmy punkt A_1 odpowiedni do A oraz—B_1 do B, odcinek A_1B_1 będzie żądany.



Rys. 235.

Odcinek $A_1B_1 \parallel AB$, o czem już wiemy z rozważań poprzednich; trzeba dowieść, że jest on miejscem geometrycznem punktów odpowiednich do punktów odcinka AB.

Weźmy dowolny punkt K odcinka AB, poprowadźmy promień jednokładności SK, który przecina odcinek A_1B_1 w punkcie K_1. Łatwo udowodnić, że ten punkt jest odpowiednim do K.

Istotnie z trójkątów SAK i SA_1K_1 mamy

$$SK,\ SK_1 \measuredangle SA,\ SA_1 \measuredangle m,\ n,$$

dlatego [że $A_1K_1 \parallel AK$, więc punkty K i K_1 są odpowiednie. Widzimy dalej, że jakikolwiek punkt weźmiemy na odcinku AB, odpowiedni punkt znajdziemy zawsze na przecięciu jego promienia jednokładności z odcinkiem A_1B_1 i poza tym odcinkiem nie będzie punktów odpowiednich do punktów odcinka AB.

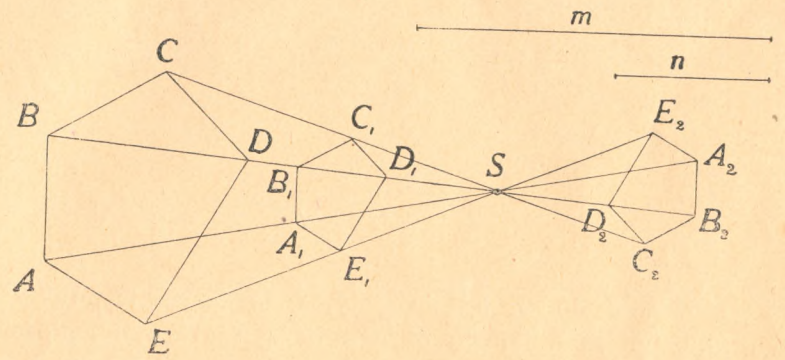
Jeżeli dany odcinek przekształcimy odwrotnie, to otrzymamy odcinek A_2B_2, tak samo równoległy do danego, ale mający zwrot przeciwny.

Wniosek. Figurą jednokładną z kątem jest kąt równy danemu.

Dowód wynika wprost z twierdzenia.

273. **Twierdzenie.** Figura jednokładna z wielokątem, jest wielokątem o kątach odpowiednio równych kątom wielokąta danego, a bokach odpowiednio równoległych do boków wielokąta danego i proporcjonalnych do odcinków danych.

Dany jest wielokąt $ABCDE$ (rys. 236), środek jednokładności S i dwa odcinki m i n.



Rys. 236.

Postępując, jak było wyżej powiedziane, otrzymujemy wielokąt $A_1B_1C_1D_1E_1$ (jednokładność prosta) lub $A_2B_2C_2D_2E_2$ (jednokładność odwrotna).

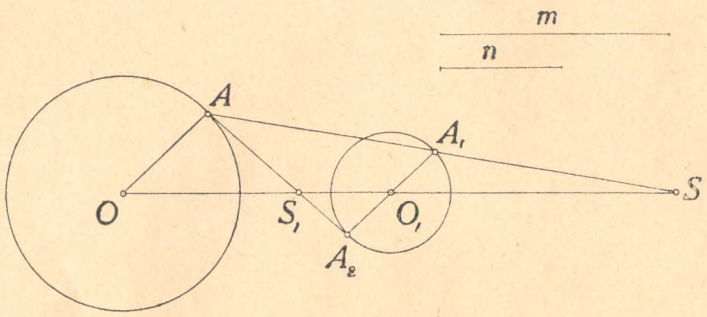
Stąd wynika, że dla otrzymania wielokąta jednokładnego z danym należy poprowadzić promienie jednokładności wszystkich wierzchołków, znaleźć punkt A_1 odpowiedni do A, potem poprowadzić $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ i t. d., ostatnim odcinkiem na naszym rysunku będzie E_1A_1, a że punkty E_1 i A_1 już przedtem były wyznaczone, więc łącząc je z sobą, powinniśmy otrzymać $A_1E_1 \parallel AE$.

274. **Twierdzenie.** Figura jednokładna z okręgiem jest również okręgiem.

Dane jest koło (rys. 237), środek jednokładności S i dwa odcinki m i n. Obierzmy dowolny punkt A na danym okręgu, poprowadźmy promień OA i wykreślmy odcinek jednokładny z OA względem środka S. Ten odcinek, jak już wiemy, będzie równoległy do OA i będzie

$$OA,\ O_1A_1 \measuredangle m,\ n.$$

Ponieważ w tej proporcji trzy wyrazy są stałe: OA, m i n, więc i czwarty wyraz musi być stały, inaczej mówiąc, wszystkie odcinki odpowiednie do jakiegokolwiek promienia danego koła będą sobie równe i mianowicie równe O_1A_1. A że punkt O_1,



Rys. 237.

jako odpowiedni do O, będzie stały, więc wszystkie punkty odpowiednie do punktów danego okręgu będą leżały w odległości O_1A_1 od punktu O_1, czyli ich miejscem geometrycznem będzie okrąg o promieniu O_1A_1, c. b. d. d.

Oczywiście rozumowanie pozostanie słuszne w przypadku jednokładności odwrotnej.

275. **Wnioski.** 1) Wyobraźmy sobie dwa okręgi O i O_1 (rys. 237); jeżeli w pierwszym poprowadzimy dowolny promień OA, a w drugim równoległy do niego promień O_1A_1, to łącząc punkty A i A_1 prostą AA_1 aż do przecięcia się z linją środków OO_1, otrzymamy punkt S, który będzie środkiem jednokładności tych kół.

Jeżeli w drugim okręgu poprowadzimy promień O_1A_2 równoległy również do OA, ale o zwrocie przeciwnym (przedłużenie O_1A_1), to postępując, jak poprzednio, otrzymamy punkt S_1, który będzie środkiem jednokładności odwrotnej danych okręgów.

Stąd wniosek:

wszelkie dwa okręgi są z sobą jednokładne; ich środek jednokładności leży na linji środków i dzieli ją na dwa odcinki proporcjonalne do promieni kół danych.

2) Gdyby się okazało (rys. 237), że promienie OA i O_1A_1 danych kół są prostopadłe do AS, to prosta AA_1S byłaby wspólną styczną do obu kół, również AS_1A_2.

Widzimy więc, że

wspólne styczne do dwóch kół przecinają się na linji środków w punkcie, który jest środkiem jednokładności tych kół.

Na tej zasadzie zadanie o wykreśleniu wspólnych stycznych do dwu kół danych może być rozwiązane przez zastosowanie jednokładności kół, należy tylko pamiętać, że wspólne styczne nie zawsze istnieją, a przynajmniej nie zawsze wszystkie istnieją.

276. Pojęcie jednokładności można rozciągnąć na figury przestrzenne czyli trójwymiarowe. Jeżeli mianowicie mamy daną figurę (F), to łącząc wszystkie jej punkty $A,B,C...$ z danym środkiem jednokładności i odmierzając na promieniach odcinki SA_1, SB_1, $SC_1...$ zadośćczyniące proporcjom:

$$SA, SA_1 \Doteq SB, SB_1 \Doteq SC, SC_1... \Doteq m, n,$$

gdzie m i n są odcinkami jednokładności, to miejsce geom. punktów A_1, B_1, $C_1...$ będzie figurą (F_1) jednokładną z daną.

Dokonawszy tej konstrukcji, każdy odcinek danej figury przekształcimy, jak wiadomo, na odcinek do niego równoległy, kąty danej figury zmianie nie ulegną, chodzić jeszcze będzie o płaszczyzny.

277. **Twierdzenie.** Figura jednokładna z płaszczyzną jest płaszczyzną do niej równoległą.

Istotnie, wyobraźmy sobie na danej płaszczyźnie P pewną prostą, przechodzącą przez dowolny punkt A tej płaszczyzny; po przekształceniu jednokładnem otrzymamy prostą w przestrzeni równoległą do poprzedniej, przechodzącą przez punkt A_1, odpowiadający punktowi A.

Jeżeli teraz na płaszczyźnie P przez ten sam punkt A poprowadzimy inną prostą, to po przekształceniu otrzymamy znowu prostą do niej równoległą, przechodzącą przez A_1.

Poprowadźmy ilekolwiek prostych na płaszczyźnie P przez punkt A, odpowiednie do nich proste będą równoległe i będą przechodziły przez A_1, a ich miejscem geometrycznem będzie płaszczyzna równoległa do płaszczyzny P.

§ 49. Podobieństwo trójkątów. Odcinki proporcjonalne w trójkącie i kole.

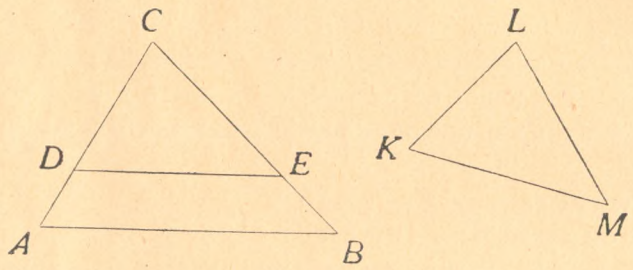
278. **Określenia.** Widzieliśmy, że dwie figury jednokładne mają:

1) odpowiednie kąty równe,
2) odpowiednie odcinki proporcjonalne i
3) odpowiednie odcinki równoległe.

Pomińmy teraz ostatnią z tych cech jednokładności i wyobraźmy sobie dwie figury, które mają

1) odpowiednie kąty równe i
2) odpowiednie odcinki proporcjonalne.

Takie figury nazywać będziemy podobnemi, a o istnieniu ich przekonywamy się stąd, że mając dwie figury jednokładne, zawsze możemy jedną z nich usunąć z położenia jednokładności, inaczej mówiąc, zbudować figurę równą jej, ale mającą boki nierównoległe do boków drugiej.



Rys. 238.

Tak np. jeżeli w trójkącie ABC (rys. 238) poprowadzimy $DE \parallel AB$, to otrzymujemy $\triangle DEC$ jednokładny z trójkątem ABC. Jeżeli teraz wykreślimy trójkąt KLM, biorąc $KM = DE$, $KL = DC$ i $ML = EC$, czyli trójkąt równy DEC, ale z bokami nierównoległemi do odpowiednich boków poprzedniego trójkąta, to dwa trójkąty ABC i KML nie będą już jednokładne, ale będą podobne.

Znakiem podobieństwa jest $\backsim$ (od łacińskiego wyrazu *similis*= podobny), piszemy więc $\triangle ABC \backsim \triangle KML$, czytając: $\triangle ABC$ jest podobny do $\triangle KML$.

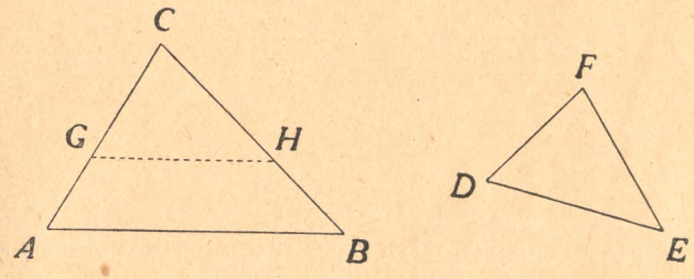
Powiadamy, że figury podobne mają kształt ten sam, ale wielkość różną; figury równe (przystające) mają i kształt i wielkość jednakową, a zatem widzimy, że figury przystające są podobne, ale nie nawzajem.

W trójkątach podobnych tak samo, jak w figurach jednokładnych, wierzchołki równych kątów nazywamy odpowiedniemi, a boki, łączące każdą parę odpowiednich wierzchołków — bokami odpowiedniemi. O tem należy pamiętać zawsze, kiedy mamy do czynienia z figurami podobnemi albo jednokładnemi.

279. **Twierdzenie.** Jeżeli dwa trójkąty mają kąty odpowiednio równe, to odpowiednie boki tych trójkątów są proporcjonalne.

Mamy dane dwa trójkąty: ABC i DEF (rys. 239), w których

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D;\ \sphericalangle B = \sphericalangle E \text{ i } \sphericalangle C = \sphericalangle F.$$



Rys. 239.

Trzeba dowieść, że

$$AB,\ BC,\ AC \mathrel{\text{⩭}} DE,\ EF,\ DF.$$

Dowód. Odetnijmy $CG = DF$ i przez punkt G poprowadźmy $GH \parallel AB$, wtedy na mocy znanego twierdzenia:

$$AB,\ BC,\ AC \mathrel{\text{⩭}} GH,\ CH,\ CG.$$

Ale $\triangle CGH = \triangle DEF$, dlatego [że mają: $CG = DF$, $\sphericalangle C = \sphericalangle G$ i $\sphericalangle CGH = \sphericalangle D$, stąd wynika, że

$$CH = EF \text{ i } GH = DE.$$

Podstawiając teraz zamiast boków $\triangle CGH$ odpowiednio im równe boki $\triangle DEF$, otrzymamy

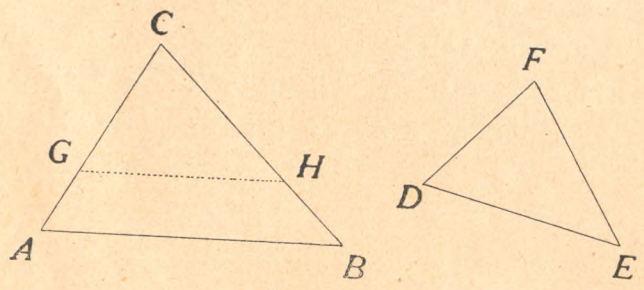
$$AB,\ BC,\ AC \mathrel{\text{⩭}} DE,\ EF,\ DF,$$

c. b. d. d.

Trójkąty, które mają po dwa kąty odpowiednio równe, mają i trzecie kąty równe, jako reszty od dwu kątów prostych, a zatem otrzymujemy następujący konieczny i wystarczający warunek czyli *pierwszą cechę podobieństwa trójkątów:*

dwa trójkąty są do siebie podobne, jeżeli mają po dwa kąty odpowiednio równe.

280. **Twierdzenie.** Jeżeli dwa trójkąty mają boki odpowiednio proporcjonalne, to kąty mają odpowiednio równe.



Rys. 240.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 240); na dowolnym odcinku DE budujemy $\triangle DEF$, w którym bok DF jest czwarty proporcjonalny do AB, DE i AC:

$$AB, DE \doteqdot AC, DF;$$

bok EF jest znowu odcinkiem czwartym proporcjonalnym do AB, DE i CB:

$$AB, DE \doteqdot CB, FE,$$

czyli mamy:

$$AB, DE \doteqdot AC, DF \doteqdot CB, FE \ldots (1)$$

Odetnijmy teraz na boku AC, począwszy od C, odcinek $CG = DF$ i poprowadźmy $GH \parallel AB$, wtedy otrzymamy trójkąt GCH jednokładny z ABC, a więc

$$AB, GH \doteqdot AC, GC \doteqdot CB, CH \ldots (2)$$

Ponieważ $GC = DF$, więc z porównania proporcyj (1) i (2) otrzymujemy:

$$GH = DE \text{ i } CH = FE.$$

Stąd widzimy, że trójkąt DFE jest równy trójkątowi GCH, który był jednokładny z $\triangle ABC$, a zatem $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

Twierdzenie jest odwrotne względem poprzedniego i zawiera w sobie *2-gą cechę podobieństwa trójkątów:*

dwa trójkąty są do siebie podobne, jeżeli mają odpowiednie boki proporcjonalne.

281. **Twierdzenie** *(3-a cecha podobieństwa trójkątów).*

Dwa trójkąty są do siebie podobne, jeżeli mają po jednym kącie równym, a boki, ten kąt obejmujące, są odpowiednio proporcjonalne.

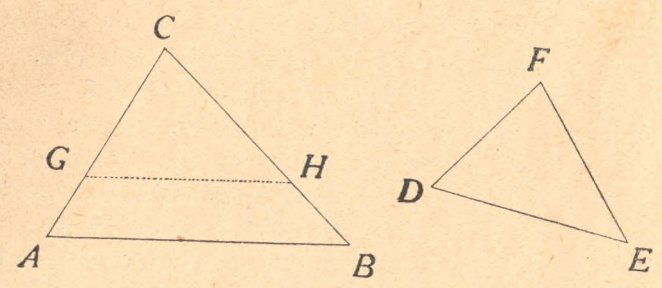
Mając dany trójkąt ABC (rys. 241), możemy zawsze wykreślić $\triangle DEF$, któryby miał

$$\sphericalangle F = \sphericalangle C$$

i

$$AC, DF \doteqdot CB, FE.$$

Jak wykonać konstrukcję?



Rys. 241.

Aby dowieść, że te trójkąty są do siebie podobne, odetnijmy, jak poprzednio, $CG = FD$ i poprowadźmy $GH \parallel AB$. Trójkąt GCH jest jednokładny z ABC, więc

$$AC, GC \doteqdot CB, CH.$$

Jeżeli teraz, pamiętając, że $GC = DF$, porównamy otrzymaną proporcję z daną, to będziemy mieli $CH = FE$.

Ponieważ wiemy jeszcze z założenia, że $\sphericalangle F = \sphericalangle C$, wnioskujemy, że $\triangle DFE = \triangle GCH$, a stąd wynika, że $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$, c. b. d. d.

282. Otrzymaliśmy w ten sposób trzy cechy podobieństwa trójkątów, przypominające analogiczne warunki ich równości. Zestawmy je tu ze sobą:

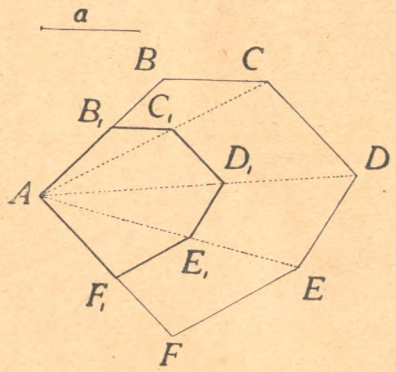
Dwa trójkąty są:

podobne: jeżeli mają:	*równe:* jeżeli mają:
1) dwa kąty równe,	1) dwa kąty i bok między niemi odpowiednio równe,
2) dwa boki proporcjonalne i kąt między niemi zawarty równy,	2) dwa boki równe i kąt między niemi zawarty równy,
3) trzy boki proporcjonalne.	3) trzy boki równe.

Z tego zestawienia widzimy, że dla równości trójkątów niezbędne są trzy warunki, dla podobieństwa zaś wystarczają dwa; inaczej mówiąc, kształt trójkąta jest wyznaczony w zupełności przez dwa warunki.

283. Pojęcie podobieństwa trójkątów łatwo rozciągnąć na wielokąty. Przedewszystkiem jednak trzeba zauważyć, że wielokąty już nie będą miały tej właściwości, jaką odznaczają się trójkąty, gdzie równość kątów pociąga za sobą proporcjonalność boków.

Nie będziemy badali szczegółowo, jakie warunki są konieczne i wystarczające dla podobieństwa wielokątów, wogóle zanotujemy, że ich będzie o jeden mniej, niż dla równości. Więc np. dla podobieństwa równoległoboków wystarczać będą dwa warunki (jakie?), kwadraty zaś wszelkie są do siebie podobne.



Rys. 242.

Zadanie. Na danym odcinku zbudować wielokąt podobny do danego.

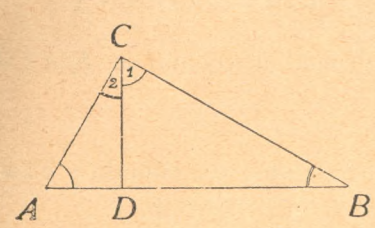
Najłatwiejszym sposobem rozwiązania będzie następujący:

Dany jest wielokąt $ABCDEF$ (rys. 242) i odcinek a, który niech będzie odpowiedni do boku AB.

Wyprowadźmy z wierzchołka A przekątne, odetnijmy $AB_1 = a$, poprowadźmy $B_1C_1 \parallel BC$, następnie $C_1D_1 \parallel CD$ i t. d. Otrzymamy wielokąt $AB_1C_1D_1E_1F_1$ podobny do danego, a nawet jednokładny z nim.

Można oczywiście za środek jednokładności obierać niekoniecznie wierzchołek A, ale punkt zewnętrzny lub wewnętrzny danego wielokąta.

284. **Twierdzenie.** Jeżeli w trójkącie prostokątnym poprowadzimy wysokość z wierzchołka kąta prostego, to: 1° wysokość będzie średnia proporcjonalna między odcinkami, na które została podzielona przeciwprostokątna; 2° każda z przyprostokątnych jest średnia proporcjonalna między całą przeciwprostokątną a rzutem na nią tej przyprostokątnej.



Rys. 243.

Dany jest trójkąt ABC (rys. 243), w którym $\sphericalangle ACB$ jest prosty, z wierzchołka C poprowadzono $CD \perp AB$.

1°. Zauważmy dwa trójkąty: ACD i DCB, które mają:

$\sphericalangle A = \sphericalangle 1$

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle B$, jako kąty z ramionami odpowiednio do siebie prostopadłemi; trójkąty te są podobne, więc ich odpowiednie boki są proporcjonalne:

$$AD, CD \mathrel{\text{⫛}} CD, DB.$$

2°. Zauważmy teraz dwa inne trójkąty: ABC i ACD, które mają $\sphericalangle A$ wspólny, $\sphericalangle B = \sphericalangle 2$; trójkąty te są również podobne, a więc znowu będzie

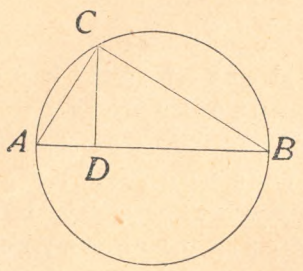
$$AB, AC \mathrel{\text{⫛}} AC, AD.$$

W taki sam sposób z trójkątów ABC i DCB otrzymamy

$$AB, CB \mathrel{\text{⫛}} CB, DB,$$

co dowodzi twierdzenia, dlatego że AD jest rzutem AC, zaś DB rzutem CB na przeciwprostokątną AB.

85. **Wnioski.** Niech będzie dane koło, poprowadźmy w niem średnicę AB (rys. 244), z dowolnego punktu C okręgu spuśćmy $CD \perp AB$. Połączmy jeszcze punkt C z końcami średnicy, wtedy AD jest rzutem cięciwy AC, DB jest rzutem CB na średnicę AB. Ponieważ kąt ACB jest prosty, więc stosując ostatnie twierdzenie do $\triangle ABC$, możemy powiedzieć, co następuje:



Rys. 244.

1°. Odcinek, poprowadzony z dowolnego punktu okręgu i prostopadły do średnicy koła, jest średni proporcjonalny między odcinkami, na które została podzielona średnica.

2°. Cięciwa, która łączy dowolny punkt okręgu z końcem średnicy, jest średnia proporcjonalna między całą średnicą a rzutem na nią tej cięciwy.

286. Jeżeli między danemi czterema odcinkami a, b, c i d istniała proporcja

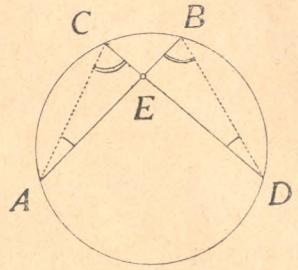
$$a, b \fallingdotseq c, d,$$

to mówiliśmy, że odcinki a i b są proporcjonalne do odcinków c i d; jeżeli między temi samemi odcinkami istnieje proporcja

$$a, b \fallingdotseq d, c,$$

mówimy, że odcinki a i b są odwrotnie proporcjonalne do c i d.

Twierdzenie. Dwie cięciwy, przecinające się wewnątrz koła, dzielą się na części odwrotnie proporcjonalne.



Rys. 245.

Niech będzie dane koło (rys. 245) i w niem dwie cięciwy: AB i CD, przecinające się w punkcie E. Pierwsza cięciwa podzieliła się w tym punkcie na dwa odcinki AE i EB, druga — na ED i CE, mamy dowieść, że

$$AE, ED \fallingdotseq CE, EB.$$

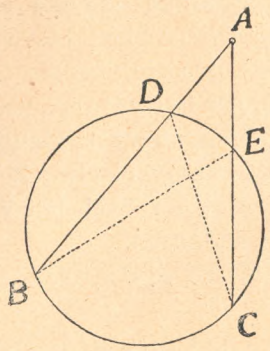
Połączmy punkty A i C oraz B i D, wtedy otrzymamy dwa trójkąty: ACE i EBD, które mają:

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$, jako wpisane oparte na tym samym łuku,

$\sphericalangle C = \sphericalangle B$, dla tej samej przyczyny, a więc trójkąty są podobne i *odpowiednie* boki tych trójkątów są proporcjonalne:

$$AE, ED \fallingdotseq CE, EB.$$

287. **Twierdzenie.** Jeżeli z punktu poza kołem wyprowadzimy dwie sieczne, to one będą odwrotnie proporcjonalne do swych odcinków zewnętrznych.



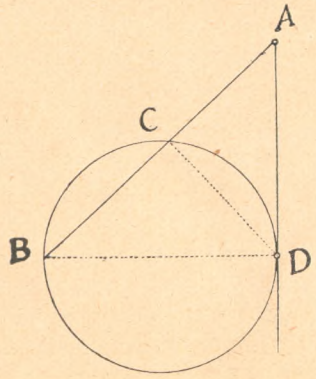
Rys. 246.

Z punktu poza kołem (rys. 246) wyprowadzono siecznie AB i AC, odcinek zewnętrzny pierwszej siecznej jest AD, drugiej AE; mamy dowieść, że $AB, AC \fallingdotseq AE, AD$.

Połączmy punkty B i E oraz D i C, wtedy otrzymamy trójkąty ABE i ADC, które mają kąty odpowiednio równe (dlaczego?), a więc są podobne i ich odpowiednie boki będą proporcjonalne:

$$AB, AC \fallingdotseq AE, AD.$$

288. **Twierdzenie.** Jeżeli z punktu poza kołem wyprowadzimy sieczną i styczną do tego koła, to styczna będzie średnia proporcjonalna między całą sieczną a jej odcinkiem zewnętrznym.



Rys. 247.

Z punktu zewnętrznego A (rys. 247) poprowadźmy styczną AD i sieczną AB, której odcinkiem zewnętrznym względem koła jest AC; należy dowieść, że

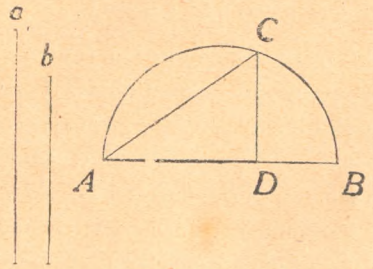
$$AB, AD \fallingdotseq AD, AC.$$

Połączmy punkt styczności D z punktami B i C, wtedy otrzymamy trójkąty ABD i ACD, które mają kąty odpowiednio równe (które i dlaczego?), a więc znowu ich odpowiednie boki będą proporcjonalne, czyli

$$AB, AD \fallingdotseq AD, AC.$$

289. **Zadanie.** Znaleźć odcinek trzeci proporcjonalny do dwóch odcinków danych.

Dane są dwa odcinki a i b (rys. 248), pierwszy niech będzie większy od drugiego; trzeba znaleźć taki trzeci odcinek x, któryby zadośćczynił proporcji: $a, b \Asymp b, x$.



Rys. 248.

Możnaby rozwiązać zadanie, jako odnajdowanie odcinka czwartego proporcjonalnego, biorąc tylko $b=c$, ale prościej będzie oprzeć konstrukcję na twierdzeniu ust. 285.

Na odcinku a wystawiamy półkole i wykreślamy cięciwę $AC=b$, wtedy jej rzut na średnicę będzie odcinkiem żądanym:

$$AB, AC \Asymp AC, AD$$

czyli

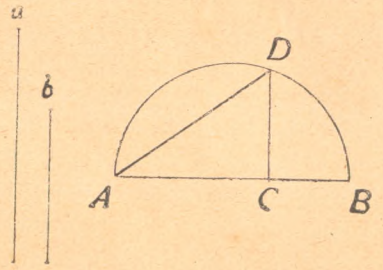
$$a, b \Asymp b, x.$$

290. **Zadanie.** Znaleźć odcinek średni proporcjonalny między dwoma danemi.

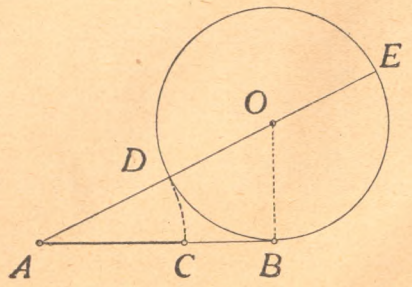
Dane są dwa odcinki: a i b, trzeba znaleźć taki odcinek x, któryby zadośćczynił proporcji: $a, x \Asymp x, b$.

Mamy tu do wyboru jedno z twierdzeń o odcinkach średnich proporcjonalnych, najdogodniej zastosować to samo twierdzenie, jak w poprzedniem zadaniu.

Na odcinku $AB=a$ (większym) odetnijmy $AC=b$, na AB wystawmy półkole (rys. 249) i z punktu C prostopadłą do średnicy. Łącząc punkt D z A, otrzymamy $AD=x$.



Rys. 249.



Rys. 250.

291. **Zadanie.** Dany odcinek podzielić na takie dwie części, aby większa z nich była średnia proporcjonalna między całym odcinkiem a mniejszą częścią.

Dany jest odcinek AB (rys. 250). Z punktu B wystawmy do niego prostopadłą i odmierzmy na niej $BO = {}^1/_2\ AB$. Jeżeli teraz z punktu O promieniem OB zakreślimy koło, następnie poprowadzimy przez jego środek sieczną AE, to na zasadzie wiadomego twierdzenia będziemy mieli

$$AE, AB \Asymp AB, AD,$$

a stąd

$$(AE - AB), AB \Asymp (AB - AD), AD,$$

ale

$$AE - AB = AE - DE = AD,$$

więc

$$AD, AB \Asymp (AB - AD), AD,$$

a po przestawieniu wyrazów:

$$AB, AD \Asymp AD, (AB - AD).$$

Odetnijmy teraz $AC = AD$, wtedy

$$AB, AC \Asymp AC, CB$$

i odcinek dany został w punkcie C podzielony na żądane dwie części.

Uwaga. Podział, o którym mowa w powyższem zadaniu, nosi nazwę podziału odcinka w stosunku średnim i skrajnym, a sposób, przez nas podany, pochodzi od uczonego geometry *Herona* z Aleksandrji (I wiek przed Chr.).

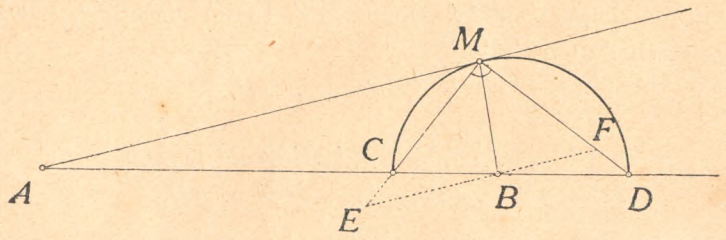
W średniowieczu nazywano to zadanie złotym podziałem odcinka („sectio aurea") i przypisywano mu wielkie znaczenie nie tylko w matematyce, ale i w przyrodzie. Uważano go za zasadę piękna w budowlach, malarstwie i rzeźbie (a słynny astronom XVII w., *Kepler*, doszukiwał się w nim pewnej mistyki i na tym podziale oparł nawet swoją symbolikę).

292. **Zadanie.** Znaleźć miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, których odległości od dwóch punktów danych są proporcjonalne do odcinków m i n $(m > n)$.

Mając dane punkty A i B (rys. 251), możemy na prostej AB znaleźć dwa punkty C i D, które dzielą odcinek AB wewnętrznie i zewnętrznie proporcjonalnie do m i n. W ten sposób mamy już dwa punkty, które niewątpliwie należą do poszukiwanego miejsca geometrycznego i są stałe.

Przypominając sobie własność dwusiecznej kąta wewnętrznego i zewnętrznego w trójkącie, twierdzimy, że zbudowawszy na podstawie AB trójkąt ABM, którego boki są proporcjonalne do odcinków m i n, otrzymamy dwusieczne jego kąta wewnętrznego i zewnętrznego przy wierzchołku M, przechodzące przez punkty C i D. A że te dwusieczne są do siebie prostopadłe, więc punkt

M będzie leżał na okręgu koła, którego średnicą jest CD. Widzimy zatem, że każdy punkt żądanego miejsca geometrycznego będzie leżał na okręgu o średnicy CD.



Rys. 251.

Musimy jeszcze dowieść, że naodwrót: każdy punkt tego okręgu będzie zadośćczynił warunkowi zadania.

Niech będzie M dowolnym punktem rzeczonego okręgu. Przez B poprowadźmy $EF \parallel AM$, wtedy mamy

$$MA,\ FB \triangleq DA,\ DB \triangleq m,\ n$$
$$MA,\ BE \triangleq CA,\ CB \triangleq m,\ n,$$

a więc

$$FB = BE,$$

czyli punkt B jest środkiem odcinka EF, a że $\sphericalangle EMF$ jest prosty, więc $FB = MB = BE$.

Podstawiając teraz w jedną z otrzymanych proporcyj zamiast FB lub BE równy im odcinek MB, otrzymamy

$$MA,\ MB \triangleq m,\ n.$$

Wobec tego możemy powiedzieć, że okrąg o średnicy CD jest żądanem miejscem geometrycznem.

Uwaga. Okrąg, o którym mówiliśmy w tem zadaniu, nosi nazwę okręgu *Apolonjusza*, jednego z wielkich geometrów greckich z III wieku przed Chrystusem.

§ 50. Metoda przekształcenia jednokładnego w zadaniach konstrukcyjnych.

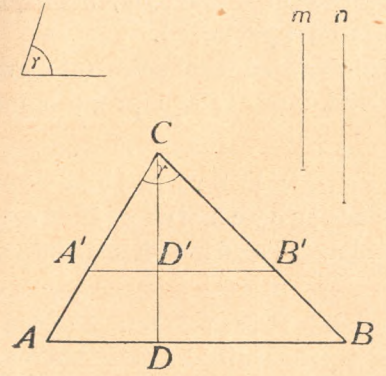
293. przeważającej liczbie zadań, które dotychczas poznaliśmy, posiłkowaliśmy się metodą miejsc geometrycznych (patrz § 28); podstawie zdobytych wiadomości zapoznamy się z inną metodą, mianowicie przekształcenia jednokładnego, odgrywającą poważną

rolę w pewnym typie zadań konstrukcyjnych. Jak to zaraz zobaczymy na przykładach, będzie ona polegała na tem, że zamiast figury żądanej, wykreślamy naprzód figurę jednokładną z nią, a potem dopiero przechodzimy do budowy figury poszukiwanej.

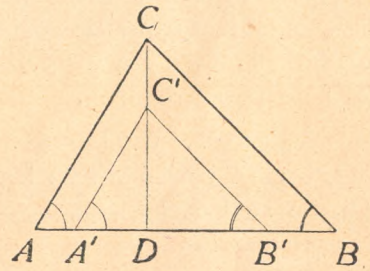
Zadanie 1. Zbudować trójkąt, mając kąt i wysokość wyprowadzoną z jego wierzchołka, jeżeli wiadomo, że boki, ten kąt obejmujące, są proporcjonalne do dwu odcinków danych m i n.

Analiza. Niech będzie trójkąt żądany ABC (rys. 252); jeżeli ma być $AC,\ BC \triangleq m,\ n$, to odmierzając $CA' = m$ i $CB' = n$, mamy $A'B' \parallel AB$ i trójkąt $A'B'C$ będzie jednokładny z ABC.

Trójkąt $A'B'C$ możemy zbudować, mając jego trzy elementy: boki m i n i kąt γ. Jeżeli teraz w tym trójkącie pomocniczym poprowadzimy wysokość CD' i odmierzymy $CD =$ wysokości danej, a następnie przez punkt D poprowadzimy $AB \parallel A'B'$, to otrzymamy trójkąt żądany ABC.



Rys. 252.



Rys. 253.

Zadanie 2. Zbudować trójkąt, mając jego dwa kąty i wysokość, wyprowadzoną z wierzchołka trzeciego kąta.

Analiza. Dwa kąty dane wyznaczają kształt żądanego trójkąta, więc zbudujmy dowolny trójkąt $A'B'C'$ (rys. 253), którego kąty A' i B' są odpowiednio równe kątom danym. Ten trójkąt będzie podobny do poszukiwanego. Jeżeli teraz na wysokości DC' odmierzymy odcinek DC równy danemu czyli wysokości żądanego trójkąta, otrzymamy wierzchołek C; poprowadźmy teraz $CA \parallel C'A'$ i $CB \parallel C'B'$ — trójkąt ABC jest żądany.

Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są nie tylko podobne, ale jednokładne (środek ?).

Zadanie 3. Zbudować trójkąt, mając jego dwa kąty i promień koła wpisanego.

Analiza. Znowu dwa kąty wyznaczają kształt żądanego trójkąta, więc budujemy naprzód trójkąt jednokładny z żądanym, znajdujemy promień koła wpisanego, a potem przechodzimy do wykreślenia poszukiwanego trójkąta, mającego promień koła wpisanego równy odcinkowi danemu.

Zadanie 4. Zbudować trójkąt, mając jego dwa kąty oraz sumę podstawy i wysokości.

Analiza. Budujemy znowu trójkąt pomocniczy o kątach równych danym, a więc podobny do żądanego. Jeżeli w tym pomocniczym trójkącie wykreślimy wysokość, to łatwo się przekonać, że w trójkącie już wykreślonym i poszukiwanym, jako w trójkątach do siebie podobnych (a nawet jednokładnych), odcinki, które są odpowiednio równe sumie podstawy i wysokości w każdym, będą proporcjonalne do odpowiednich boków (albo wysokości).

Zadanie sprowadza się do znalezienia jednego boku (albo wysokości) trójkąta żądanego, jako odcinka czwartego proporcjonalnego do trzech danych.

Zadanie 5. Wykreślić trójkąt, w którym jest dany kąt, suma boków ten kąt obejmujących, jeżeli wiadomo, że te boki są proporcjonalne do dwóch odcinków danych m i n.

Analiza. Nazwijmy kąt dany γ, boki tworzące ten kąt a i b, wtedy dwa warunki: γ i $a, b \mathrel{\dot{\wedge}} m, n$ wyznaczają kształt żądanego trójkąta.

Zbudujmy z trzech elementów: m, n i γ trójkąt pomocniczy $A'B'C$, który będzie jednokładny z żądanym ABC względem wierzchołka C.

Z proporcji:

$$a, b \mathrel{\dot{\wedge}} m, n$$

możemy utworzyć nową proporcję

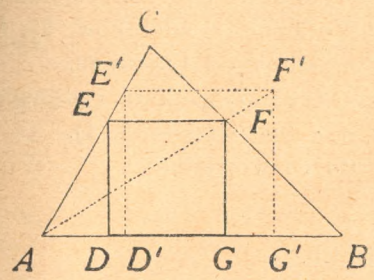
$$(a+b), b \mathrel{\dot{\wedge}} (m+n), n,$$

gdzie odcinek b może być wykreślony, jako czwarty proporcjonalny do trzech danych: $(m+n)$, n i $(a+b)$; ten właśnie odcinek b będzie decydował o wielkości poszukiwanego trójkąta.

Dalsza konstrukcja, jak w zadaniu poprzedniem.

Zadanie 6. W trójkąt wpisać kwadrat, którego dwa wierzchołki mają leżeć na podstawie trójkąta.

Analiza. Dany jest trójkąt ABC (rys. 254); przypuśćmy, że zadanie rozwiązano i żądanym kwadratem jest $DEFG$. Połączmy jego wierzchołek F z punktem A, który jak widzimy, jest połączony ze wszystkiemi wierzchołkami kwadratu.



Rys. 254.

Jeżeli więc punkt A obierzemy za środek jednokładności, to obierając na prostej AF dowolny punkt F', możemy wykreślić $F'G' \parallel FG$, potem $E'F' \parallel EF$, wreszcie $E'D' \parallel ED$ i otrzymamy kwadrat $D'E'F'G'$ jednokładny z żądanym i mający trzy wierzchołki zadośćczyniące warunkom zadania, oprócz czwartego F'.

Stąd już widoczny jest sposób rozwiązania: wykreślić naprzód kwadrat pomocniczy, obierając dowolny punkt E' na boku AC, połączyć F' i A, wtedy na przecięciu AF' z bokiem CB będzie leżał wierzchołek F żądanego kwadratu.

Zadanie 7. Wpisać kwadrat w wycinek koła.

Wskazówka. Wykreślić naprzód kwadrat, jednokładny z żądanym względem środka koła.

Zadanie 8. Zbudować trójkąt, mając jego trzy wysokości.

Analiza. Przedewszystkiem trzeba udowodnić, że wysokości trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do odpowiednich boków. Nazwijmy boki żądanego trójkąta: x, y, z, a odpowiednie wysokości: h_1, h_2, h_3. Odcinki h_1, h_2 i h_3 są dane.

Mamy naprzód proporcje:

$$x, y \mathrel{\dot{\wedge}} h_2, h_1$$

oraz

$$y, z \mathrel{\dot{\wedge}} h_3, h_2.$$

Wykreślmy teraz odcinek k, jako czwarty proporcjonalny do trzech danych: h_3, h_2 i h_1, czyli odcinek zadośćczyniący proporcji:

$$h_3, h_2 \mathrel{\dot{\wedge}} h_1, k.$$

Taką konstrukcję zawsze wykonać można i odcinek k będzie wyznaczony, możemy więc teraz napisać następujące proporcje (zamiast poprzednich):

$$x,\ y \mathrel{\Delta} h_2,\ h_1,$$
$$y,\ z \mathrel{\Delta} h_1,\ k$$

czyli krócej:

$$x,\ y,\ z \mathrel{\Delta} h_2,\ h_1,\ k.$$

Stąd widzimy, że boki żądanego trójkąta są proporcjonalne do boków trójkąta pomocniczego, zbudowanego z odcinków: h_2, h_1 i k, a więc trójkąt pomocniczy będzie podobny do żądanego.

Następnie już przechodzimy do konstrukcji trójkąta żądanego, wprowadzając odcinek równy jednej z wysokości (zadanie 1).

Czy zadanie zawsze jest możliwe do rozwiązania?

§ 51. Ćwiczenia.

1. Jakie są warunki, wystarczające do podobieństwa trójkątów prostokątnych? równoramiennych?

2. Jakie są warunki podobieństwa równoległoboków wogóle? prostokątów? rombów?

3. Zbudować trójkąt, mając jego dwa kąty i środkową względem trzeciego boku.

4. Zbudować trójkąt, mając jego dwa kąty i dwusieczną kąta trzeciego.

5. Zbudować trójkąt, mając jego dwa kąty i obwód.

6. Zbudować trójkąt równoboczny, w którym suma podstawy i wysokości jest dana.

7. W koło wpisać trójkąt podobny do trójkąta danego.

8. W półkole wpisać kwadrat.

9. Na danym kwadracie opisać trójkąt podobny do trójkąta danego.

10. W trójkąt wpisać prostokąt, którego boki byłyby proporcjonalne do dwu odcinków danych.

11. W trójkąt wpisać równoległobok, któryby miał kąt wspólny z trójkątem danym, a boki proporcjonalne do dwu odcinków danych.

12. W trójkąt wpisać równoległobok podobny do równoległoboku danego.

13. W półkole wpisać prostokąt, którego boki są proporcjonalne do odcinków m i n.

14. Wykreślić trójkąt podobny do danego tak, żeby jego wierzchołki leżały na danych trzech prostych.

15. Wykreślić trójkąt równoboczny, którego wierzchołki mają leżeć na danych trzech prostych.

16. Zbudować równoległobok, mając jego przekątne, jeżeli boki są proporcjonalne do dwóch odcinków danych.

17. W koło wpisać trójkąt o danej podstawie, jeżeli pozostałe boki są proporcjonalne do odcinków m i n.

18. W kole poprowadzono dwa promienie. Wykreślić taką cięciwę, któraby przez te promienie została podzielona na trzy części równe.

19. Zbudować trójkąt równoramienny, którego wysokość jest dana, a podstawa i jeden z boków równych są proporcjonalne do odcinków m i n.

20. Zbudować trójkąt, mając podstawę i kąt do niej przyległy, jeżeli podstawa i jeden z pozostałych boków są proporcjonalne do odcinków m i n.

21. Zbudować trójkąt, mając jego podstawę, jeżeli ta podstawa i dwa pozostałe boki są proporcjonalne do odcinków l, m i n.

22. Zbudować trójkąt, mając jego podstawę i różnicę dwóch pozostałych boków, jeżeli te boki są proporcjonalne do odcinków m i n.

23. Zbudować trójkąt, mając jego podstawę i sumę pozostałych boków, jeżeli te boki są proporcjonalne do odcinków m i n.

24. Zbudować trójkąt, którego podstawa i kąt do niej przyległy są dane, a pozostałe boki są proporcjonalne do odcinków m i n.

25. Dowieść, że w trójkącie wysokości są odwrotnie proporcjonalne do odpowiednich boków.

(26—32). W trójkącie ABC nazwijmy kąty: α, β, γ, przeciwległe boki: a, b, c; odpowiednie wysokości: h_1, h_2, h_3; środkowe: m_1, m_2, m_3; dwusieczne kątów: w_1, w_2, w_3; promień koła opisanego R, wpisanego—r.

Zbudować trójkąt ABC, mając:

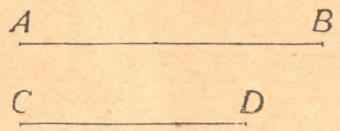
26. $c;\ \gamma;\ a, h_3 \mathrel{\Delta} m,\ n.$
27. $m_1;\ \gamma;\ h_3,\ w_3 \mathrel{\Delta} m,\ n.$
28. $r;\ \gamma;\ c, m_3 \mathrel{\Delta} m,\ n.$
29. $h_1;\ \beta;\ c, (a+b) \mathrel{\Delta} m,\ n.$
30. $a;\ \alpha;\ c, R \mathrel{\Delta} m,\ n.$
31. $a;\ \alpha;\ c, r \mathrel{\Delta} m,\ n.$
32. $\gamma;\ m_1 + m_2 = s;\ a, m_3 \mathrel{\Delta} m,\ n.$

ROZDZIAŁ X.

Definicja metryczna odcinków proporcjonalnych.

§ 52. O mierzeniu odcinków.

294. Wiemy już, jak się odnajduje stosunek dwóch odcinków spółmiernych. Zadanie to rozwiązywaliśmy w ten sposób, że układaliśmy odcinek CD (rys. 255) na AB tyle razy, ile okazało się możliwe, i tu, jak widzieliśmy, mogły zajść dwa przypadki:



Rys. 255.

a) odcinek CD pomieści się w AB całkowitą liczbę razy bez reszty, np. k razy, wtedy powiadamy, że stosunek $\frac{AB}{CD}$ jest równy liczbie całkowitej k:

$$\frac{AB}{CD} = k;$$

b) odcinek CD nie da się pomieścić w AB bez reszty, ale jego pewna część, np. n-ta część, pomieści się m razy, wtedy stosunek $\frac{AB}{CD}$ wyraża się liczbą ułamkową $\frac{m}{n}$:

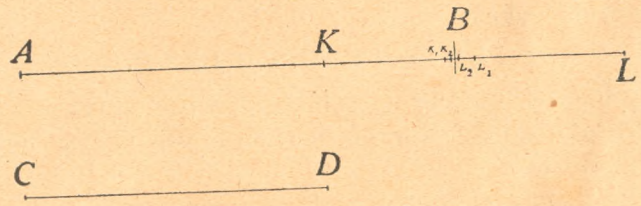
$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}.$$

Jeżeli odcinek CD obierzemy za jednostkę, to wtedy odcinkowi AB odpowiadać będzie w 1-ym razie liczba całkowita k, w 2-im liczba ułamkowa $\frac{m}{n}$; każda z tych liczb nazywa się liczbą wymiarową odcinka AB, albo krócej długością odcinka AB.

Nawzajem: mając daną liczbę wymiarową i jednostkę długości, zawsze możemy wykreślić odcinek, odpowiadający tej liczbie. Np. jeżeli wiadomo, że liczba wymiarowa czyli długość pewnego odcinka a jest równa 5, albo $3\frac{3}{4}$, a za jednostkę wzięto odcinek l, to zawsze możemy wykreślić odcinek $a = 5l$, albo $a = 3\frac{3}{4}l$.

Możemy zatem powiedzieć, że każda liczba całkowita albo ułamkowa wyznacza pewien odcinek, jeżeli jednostka długości jest dana.

295. Przechodzimy teraz do przypadku, kiedy dane odcinki są niespółmierne. Niech takiemi odcinkami będą: AB i CD (rys. 256); to znaczy, że dzieląc na ilekolwiek równych części odcinek CD i odmierzając je na AB, nigdy nie natrafimy na taką część, którąby pomieściła się w AB całkowitą liczbę razy. A więc stosunek danych odcinków nie da się wyrazić ani całkowitą, ani ułamkową liczbą, inaczej mówiąc: jeżeli odcinek CD obierzemy za jednostkę, nie możemy wyrazić długości odcinka AB ani całkowitą, ani ułamkową liczbą.



Rys. 256.

Dla ułatwienia rozumowania przypuśćmy, że CD jest bokiem kwadratu, a AB jego przekątną; wtedy, odcinając $AK = CD$, przekonamy się, że otrzymamy na odcinku AB resztę KB mniejszą od CD, a więc będzie odcinek AB większy od $AK = CD$, ale mniejszy od $AL = 2CD$, czyli $CD < AB < 2\,CD$.

Różnicę $AL - AK = KL = CD$ podzielmy na dowolną liczbę, np. na 10 części równych i odmierzmy je na AB, począwszy od K, wtedy (na zasadzie znanego pewnika Archimedesa) zawsze natrafimy

na taką liczbę tych części, że odmierzając je, jak była mowa, na AB, otrzymamy, jako ostatni, pewien punkt K_1 położony wewnątrz odcinka AB, a odmierzając jeszcze raz, otrzymamy już punkt L_1 na przedłużeniu AB. Okaże się mianowicie, że:

$$1{,}4\ CD < AB < 1{,}5\ CD,$$

Różnicę $AL_1 - AK_1 = K_1L_1 = \frac{1}{10}\ CD$ podzielmy znowu na 10 części równych i odmierzmy je na AB (począwszy od K_1); okaże się, że koniec K_2 pierwszej z nich upadnie na lewo od B, a koniec 2-ej L_2 już na prawo od tego punktu i będzie

$$1{,}41\ CD < AB < 1{,}42\ CD.$$

Oczywiście nie mogliśmy trafić na punkt B, dlatego że odcinki AB i CD są niespółmierne.

Idźmy dalej: różnicę $K_2L_2 = \frac{1}{100}\ CD$ podzielmy znowu na 10 części równych i okaże się, że

$$1{,}414\ CD < AB < 1{,}415\ CD.$$

Postępując w opisany sposób dalej, wciąż otrzymywać będziemy dwa odcinki, między któremi zawierać się będzie odcinek AB. Będzie mianowicie:

$$\begin{gathered} 1\ CD < AB < 2\ CD \\ 1{,}4\ CD < AB < 1{,}5\ CD \\ 1{,}41\ CD < AB < 1{,}42\ CD \\ 1{,}414\ CD < AB < 1{,}415\ CD \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered}$$

W ten sposób otrzymujemy dwa ciągi liczb, odpowiadających wymienionym poprzednio odcinkom:

1) 1; 1,4; 1,41; 1,414; . . .
2) 2; 1,5; 1,42; 1,415; . . .

Ponieważ bok i przekątna kwadratu są, jak wiemy, niespółmierne, więc otrzymane ciągi będą nieskończone (a to na mocy związków, zachodzących między twierdzeniem prostem, przeciwnem i odwrotnem).

Wtedy stosunek $\frac{AB}{CD}$, którego nie możemy wyrazić ani całkowitą, ani ułamkową liczbą, da się wyznaczyć w następujący sposób:

Dzielimy *wszystkie* liczby całkowite i ułamkowe, czyli wszystkie liczby wymierne, na dwie klasy, zaliczając do 1-ej klasy wszystkie liczby 1-go z otrzymanych poprzednio ciągów i liczby od nich mniejsze, a do 2-ej klasy wszystkie liczby 2-go ciągu i liczby od nich większe. Każda liczba 1-ej klasy jest mniejsza od każdej liczby 2-ej klasy i każda pomyślana liczba musi należeć do jednej z tych klas.

Taki podział nosi nazwę *przekroju* liczb wymiernych.

Jeżeli, jak w omawianym przypadku, 1-sza klasa nie posiada liczby największej, a 2-ga najmniejszej, przekrój wyznacza *liczbę niewymierną*.

(Omówiony przez nas przekrój wyraża się symbolem $\sqrt{2}$).

296. Widzimy teraz, że stosunek wszelkich dwóch odcinków możemy wyrazić liczbą: jeżeli odcinki są spółmierne, będzie to liczba wymierna, t. j. całkowita lub ułamkowa, jeżeli zaś są niespółmierne—liczba niewymierna.

Każda liczba klasy 1-ej naszego przekroju daje t. zw. *przybliżoną wartość* poszukiwanego stosunku (czyli liczby niewymiernej) z niedomiarem, każda zaś liczba 2-ej klasy daje wartość przybliżoną z nadmiarem.

Jeżeli więc pragniemy znaleźć przybliżoną wartość stosunku $\frac{AB}{CD}$ z dokładnością do $\frac{1}{n}$, dzielimy odcinek CD na n części równych i odmierzamy je na AB. Wtedy, na zasadzie pewnika Archimedesa, zawsze znajdziemy taką liczbę m, że będzie

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}$$

i przybliżona wartość stosunku $\frac{AB}{CD}$ z dokładnością do $\frac{1}{n}$ będzie $\frac{m}{n}$ (z niedomiarem), lub $\frac{m+1}{n}$ (z nadmiarem); to znaczy, że biorąc

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$$

lub

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m+1}{n},$$

popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{n}$.

Korzystając np. z ciągów, któreśmy poprzednio otrzymali dla liczb $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{4}$, powiemy, że liczbę $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{4})$ wyznaczymy przez przekrój dwu klas liczb:

$1^0 \ldots (1 + 1);\ (1{,}4 + 1{,}5);\ (1{,}41 + 1{,}58);\ (1{,}414 + 1{,}587);\ \ldots\ .$
$2^0 \ldots (2 + 2);\ (1{,}5 + 1{,}6);\ (1{,}42 + 1{,}59);\ (1{,}415 + 1{,}588);\ \ldots\ .$

Idąc dalej, powiemy, że większemu odcinkowi odpowiadać będzie większa liczba wymiarowa, różnicy dwóch odcinków odpowiadać będzie różnica ich liczb wymiarowych i nawzajem.

Widzimy więc, że między odcinkiem a jego liczbą wymiarową istnieje ścisła zależność, która pozwala wyznaczyć odcinek, jeżeli liczba jest dana i nawzajem: wyznaczyć liczbę, jeżeli odcinek jest dany.

Taką zależność nazywamy odpowiedniością doskonałą; pozwala ona działania na odcinkach zastępować analogicznemi działaniami na liczbach i nawzajem.

299. W praktyce, jako stałej jednostki do mierzenia odcinków, używa się miary linjowej, zwanej metrem (m) i jego dziesiętnych części: centymetr (cm) $= 0{,}01$ m i milimetr (mm) $= 0{,}001$ m. Jeżeli chodzi o praktyczne zmierzenie danego odcinka, nie wchodzimy w to, czy on jest spółmierny z jednostką, czy niespółmierny: zawsze odnajdujemy długość odcinka z pewną dokładnością. Mając więc dany odcinek, przedewszystkiem odnajdujemy (linją podzieloną na centymetry i milimetry lub cyrklem), ile całkowitych centymetrów zawiera odcinek, ile następnie mieści się milimetrów, a resztę, która może się okazać, odrzucamy. Są przyrządy, używane w pomiarach, wymagających większej dokładności, zapomocą których możemy odczytywać dziesiąte a nawet setne części milimetra — dokładność w zupełności wystarczająca dla celów praktycznych.

§ 53. Mierzenie kątów i łuków.

300. Kąty i łuki należą, jak wiemy, do wielkości geometrycznych i do nich mogą być zastosowane te rozumowania, które przeprowadziliśmy, ustalając pojęcie o stosunku i mierzeniu odcinków.

Aby więc znaleźć stosunek dwóch kątów, należy postępować, jak z odcinkami: odejmować mniejszy kąt, albo pewną jego część, od większego tyle razy, ile okaże się możliwe i stosunek będzie

wyrażony albo liczbą całkowitą, albo ułamkową, albo wreszcie niewymierną.

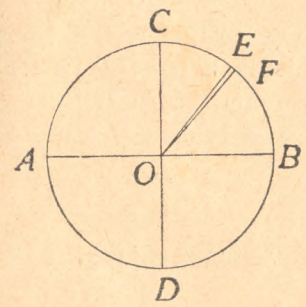
Aby zmierzyć kąt dany, należy go porównać, czyli znaleźć stosunek do innego kąta, który obieramy za jednostkę. Za taką stałą jednostkę można wziąć kąt prosty — tak nawet robiliśmy, kiedy zachodziła potrzeba porównania kątów (kąt ostry, rozwarty)— w praktyce jednak ta jednostka jest zbyt wielka, bierzemy więc $^1/_{90}$ część kąta prostego za miarę kątów i nazywamy taki kąt stopniem kątowym (^{0}), jego 60-tą część minutą ($'$), a 60-tą część minuty nazywamy sekundą ($''$). Piszemy np.:

$$\sphericalangle \alpha = 36^0\, 24'\, 50'',$$

czytając: 36 stopni 24 minuty 50 sekund.

Widzimy zatem, że kąt prosty $= 90^0$, kąt półpełny $= 180^0$, więc niektóre twierdzenia, któreśmy dawniej otrzymali, można teraz wypowiedzieć w nieco innej formie, np. suma kątów trójkąta $= 180^0$, każdy z kątów trójkąta równobocznego $= 60^0$, suma kątów wielokąta $= 180^0 . (n - 2)$, gdzie n jest liczbą boków i t. p.

301. Za jednostkę łuków bierze się $^1/_{360}$ część całego okręgu, która nosi nazwę stopnia łukowego (^{0}), stopień dzieli się na 60 minut łukowych ($'$), minuta na 60 sekund ($''$) łukowych.

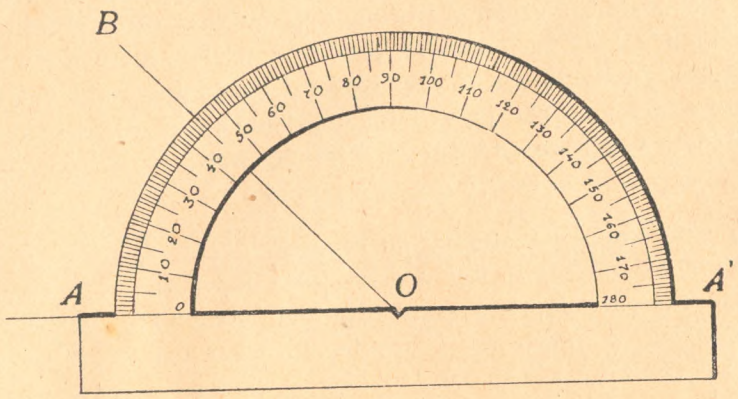


Rys. 257.

Ponieważ, jak wiemy, równym kątom środkowym odpowiadają równe łuki i nawzajem, więc jeżeli w kole (rys. 257) poprowadzimy dwie prostopadłe do siebie średnice AB i CD, to otrzymamy cztery kąty proste, którym, jako kątom równym sobie, odpowiadać będą równe łuki, więc każdy z nich, np. CB, zawierać będzie 90^0; jeżeli wyobrazimy sobie łuk $EF = {}^1/_{90}$ łuku CB, t. j. łuk$=1^0$, to łącząc jego końce ze środkiem koła, otrzymamy kąt środkowy EOF równy 1^0, wogóle:

kąt środkowy zawiera w sobie tyle stopni kątowych, ile odpowiadający mu łuk ma stopni łukowych.

302. W praktyce do mierzenia kątów stopniami posługujemy się przyrządem, który nosi nazwę przenośnika i zbudowany jest na omówionej zależności między kątem środkowym a odpowiadającym mu łukiem.



Rys. 258.

Przenośnik (rys. 258) jest półkolem (najczęściej metalowem), którego półokrąg jest podzielony na 180 stopni (w dokładniejszych przenośnikach podziałka jest zrobiona co $^1/_2$ stopnia), środkiem półkola jest punkt O, średnicą AA'.

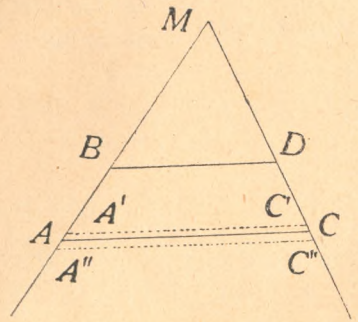
Aby zmierzyć dany kąt, kładziemy przenośnik w taki sposób, aby średnica miała kierunek jednego ramienia kąta (OA), a środek wypadał w wierzchołku kąta, wtedy drugie ramię kąta (OB) wskaże na łuku ilość stopni (liczonych od A), zawartych w łuku, a więc i w danym kącie.

§ 54. Metryczna definicja odcinków proporcjonalnych.

303. **Określenie.** Jeżeli są cztery odcinki: a, b, c, d takiego rodzaju, że stosunek pierwszych dwóch $(a : b)$ jest równy stosunkowi dwóch ostatnich $(c : d)$, to takie odcinki nazywamy proporcjonalnemi i wyrażamy to, pisząc proporcję:

$$a : b = c : d.$$

W swoim czasie poznaliśmy odcinki proporcjonalne (ust. 257), rozumiejąc przez tę nazwę cztery odcinki, które parami są wyznaczone przez dwie równoległe, przecinające ramiona dowolnego kąta. Może się zrodzić pytanie, czy te dwa określenia proporcjonalności odcinków są jednoznaczne? Czy ta proporcjonalność, dwojako określona, jest ta sama?



Rys. 259.

Dowiedziemy, że tak jest:

1°. Wykreślmy dowolny kąt M (rys. 259) i jego ramiona przetnijmy dwiema równoległemi, wtedy otrzymujemy cztery odcinki: MA, MB, MC i MD proporcjonalne według określenia dawniejszego, które nazwiemy geometrycznem. Dowiedziemy, że te odcinki będą również proporcjonalne według nowej definicji, którą nazywać będziemy metryczną, czyli dowiedziemy, że stosunek $MA : MB$ będzie równy stosunkowi odcinków $MC : MD$.

Dowód jest zbyteczny, jeżeli odcinki MA i MB są spółmierne (ust. 256), chodzi o przypadek, kiedy one są niespółmierne. Wtedy, jak wiemy, stosunek $MA : MB$ będzie się wyrażał liczbą niewymierną, która będzie wyznaczona przez pewien przekrój dwóch klas liczb wymiernych, a poszczególne liczby obu klas będą dawały przybliżone wartości liczby niewymiernej, np.

1°. 1; 1,4; 1,41; 1,414; . . .

2°. 2; 1,5; 1,42; 1,415; . . .

Każdej liczbie wymiernej, wziętej z jednej z tych klas, odpowiadać będzie odcinek spółmierny z MB (mniejszy od MA, jeżeli bierzemy liczbę 1-ej klasy i większy od MA, jeżeli bierzemy liczbę 2-ej klasy): np. odcinek MA' lub MA''.

Jeżeli przez koniec tego odcinka poprowadzimy równoległą do BD, to na drugiem ramieniu kąta otrzymamy odcinek MC' lub MC'' spółmierny z MD, a stosunek $\frac{MA'}{MB}$ będzie równy stosunkowi $\frac{MC'}{MD}$ i tak samo

$$\frac{MA''}{MB} = \frac{MC''}{MD}.$$

Będziemy więc mieli

$$\frac{MA'}{MB} < \frac{MA}{MB} < \frac{MA''}{MB}$$

$$\frac{MC'}{MD} < \frac{MC}{MD} < \frac{MC''}{MD}.$$

Wogóle znajdziemy takie dwie liczby wymierne $\frac{m}{n}$ i $\frac{m+1}{n}$, że

$$\frac{m}{n} < \frac{MA}{MB} < \frac{m+1}{n},$$

tak samo

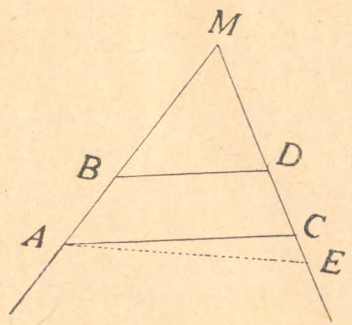
$$\frac{m}{n} < \frac{MC}{MD} < \frac{m+1}{n},$$

czyli stosunek odcinków $MC : MD$ będzie wyrażony przez przekrój takich samych dwóch klas liczb, jak stosunek $MA : MB$, czyli będzie

$$MA : MB = MC : MD,$$ c. b. d. d.

2°. Dowiedziemy jeszcze, że nawzajem: jeżeli odcinki MA, MB, MC, MD są proporcjonalne według definicji metrycznej, t. j. jeżeli stosunek $MA : MB$ jest równy stosunkowi $MC : MD$, to odmierzając te odcinki na ramionach jakiegokolwiek kąta (rys. 260) i łącząc ich końce odcinkami, otrzymamy:

$$AC \parallel BD.$$



Rys. 260.

Przypuśćmy, że tak nie jest i z punktu A wyprowadźmy $AE \parallel BD$, wtedy musiałyby być odcinki MA, MB, ME i MD proporcjonalne geometrycznie:

$$MA,\ MB \nparallel ME,\ MD,$$

więc stosunek $MA : MB$ byłby równy stosunkowi $ME : MD$, a więc byłoby także

$$ME : MD = MC : MD,$$

a stąd musiałoby być $ME = MC$.

Tym sposobem proporcja geometryczna między odcinkami zdobyła wszystkie prawa proporcji metrycznej; jeżeli więc będziemy mieli do czynienia z proporcją

$$a : b = c : d,$$

możemy powiedzieć, że dane cztery odcinki są wyznaczone na ramionach kąta przez dwie równoległe (odcinki *Talesowskie*) albo też, że stosunek pierwszych dwóch odcinków jest równy stosunkowi dwóch pozostałych.

Tak samo przez a, b, c, d możemy rozumieć odcinki geometrycznie pojęte, albo też liczby wymiarowe, które oznaczają ich długości.

Mając więc proporcję:

$$a : b = c : d,$$

możemy z niej utworzyć iloczyny wyrazów skrajnych i średnich i otrzymać równość

$$a \,.\, d = b \,.\, c,$$

rozumiejąc przez ad liczbę, która jest iloczynem liczb wymiarowych odcinków a i d, tak samo $b \,.\, c$.

Z proporcji

$$a : x = x : b$$

możemy utworzyć równość

$$x^2 = ab,$$

gdzie x^2 oznaczać będzie liczbę, która jest równa kwadratowi liczby wymiarowej odcinka x.

Tu należy zauważyć, że liczby wymiarowe odcinków a i b (albo c i d) mogą być niewymierne, wtedy iloczyn ab będzie wyznaczony przez taki przekrój, gdzie do 1-ej klasy będą należały iloczyny liczb, stanowiących 1-sze klasy przekrojów dla liczb a i b, tak samo do 2-ej klasy. Jeżeli więc np. liczba wymiarowa odcinka $a = \sqrt{2}$, odcinka $b = \sqrt[3]{4}$, to iloczyn ab będzie wyznaczony przez dwie klasy liczb wymiernych: do 1-ej należeć będą iloczyny (wszelkie możliwe) liczb 1-szych klas dla $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{4}$, a więc liczb:

1; 1,4; 1,41; 1,414; . . .

oraz 1; 1,5; 1,58; 1,587; . . .

więc liczby (1 . 1,5); (1,4 . 1,5); (1,41 . 1,5); . . .

albo (1 . 1,58); (1,41 . 1,58); (1,414 . 1,58); . . . i t. p.

co symbolicznie możemy oznaczyć:

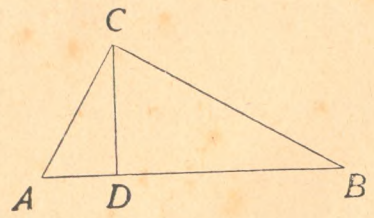
$$przekr.\ (a \,.\, b) = przekr.\ (a).\ przekr.\ (b).$$

§ 55. Związki metryczne między odcinkami w trójkącie i kole.

304. Na zasadzie tego, co było wyżej powiedziane, możemy teraz, powracając do niektórych twierdzeń, wyrażających proporcjonalne zależności między odcinkami trójkąta prostokątnego (patrz 284).

sformułować je inaczej, traktując odcinki i proporcje między niemi z punktu widzenia metrycznego.

A więc, jeżeli w trójkącie prostokątnym ABC (rys. 261) poprowadzimy z wierzchołka C kąta prostego wysokość CD, to:



Rys. 261.

$AD : CD = CD : DB$, stąd mamy

$$CD^2 = AD \,.\, DB,$$

t. j. kwadrat liczby wymiarowej wysokości trójkąta prostokątnego, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, jest równy iloczynowi liczb wymiarowych odcinków, na które została podzielona przeciwprostokątna, albo krócej:

kwadrat wysokości trójkąta prostokątnego, wyprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, jest równy iloczynowi odcinków tej przeciwprostokątnej.

Tak samo mieliśmy:

$$AB : AC = AC : AD, \text{ skąd będzie}$$

$$AC^2 = AB \,.\, AD,$$

t. j. w trójkącie prostokątnym kwadrat przyprostokątnej jest równy iloczynowi przeciwprostokątnej i rzutu na nią tej przyprostokątnej.

Ściśle: kwadrat liczby wymiarowej przyprostokątnej jest równy iloczynowi liczb wymiarowych przeciwprostokątnej i rzutu na nią przyprostokątnej.

Jeżeli tę samą zależność zastosujemy do drugiej przyprostokątnej, to otrzymamy

$$CB^2 = AB \,.\, DB,$$

a dodając tę równość do poprzedniej, mamy

$$AC^2 + CB^2 = AB\ (AD + DB),$$

czyli

$$AB^2 = AC^2 + CB^2,$$

t. j. w trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów obu przyprostokątnych.

Znowu ściśle należało powiedzieć: kwadrat liczby wymiarowej i t. d.

Jest to zależność wielkiej wagi: pozwala ona obliczyć jeden z boków trójkąta prostokątnego, jeżeli dwa pozostałe są dane. Np. przyprostokątne są odpowiednio: a i b, wtedy przeciwprostokątna c:

$$c = \sqrt{b^2 + c^2},$$

a przyprostokątna

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Np. $a = 12$ cm. $c = 15$ cm., wtedy

$$b = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = 9 \text{ cm}.$$

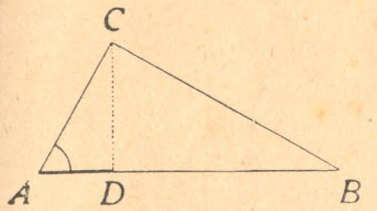
305. Ostatnie twierdzenie można uogólnić na przypadek trójkąta ukośnokątnego.

1°. Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 262), w którym kąt A jest ostry; obierając bok AB za podstawę, poprowadźmy wysokość CD, wtedy otrzymamy dwa trójkąty prostokątne: CDB i ACD. Z pierwszego mamy:

$$CB^2 = CD^2 + DB^2,$$

z drugiego:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2.$$



Rys. 262.

Podstawiając w 1-szą równość wartość CD^2 i zastępując DB przez $(AB - AD)$, otrzymamy

$$CB^2 = (AC^2 - AD^2) + (AB - AD)^2,$$

skąd ostatecznie:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB \,.\, AD.$$

Mamy zatem **twierdzenie** następujące:

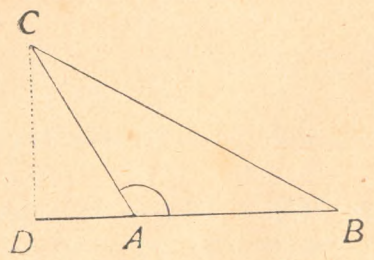
w trójkącie kwadrat boku, położonego naprzeciw kąta ostrego, jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków, zmniejszonej o podwójny iloczyn podstawy i jej odcinka, liczonego od wierzchołka kąta ostrego do spodka wysokości.

2°. Jeżeli w danym trójkącie (rys. 263) kąt CAB jest rozwarty, to biorąc znowu za podstawę bok AB i za wysokość CD, otrzymamy dwa trójkąty prostokątne: CDB i ACD, a z nich, jak poprzednio, otrzymamy:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2\ AB \,.\, AD$$

(sformułować to twierdzenie słowami).

Uwaga. Za podstawę trójkąta można było obrać bok AC i poprowadzić względem niej wysokość, wtedy zamiast iloczynu $AB.AD$ otrzymamy inny, łatwo jednak udowodnić, że te iloczyny będą sobie równe (jak?).



Rys. 263.

306. Sposobem sprowadzenia do niedorzeczności można dowieść twierdzeń odwrotnych:

w trójkącie kąt jest ostry, rozwarty lub prosty, zależnie od tego, czy kwadrat boku, położonego naprzeciw niego, jest mniejszy, większy lub równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków.

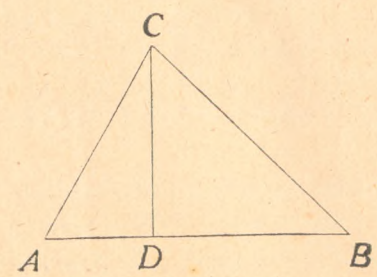
Np. 1) Jeżeli boki trójkąta są odpowiednio równe: 10 cm., 8 cm. i 5 cm., to trójkąt istnieje, dlatego że $8-5<10<8+5$, a kąt położony naprzeciw boku pierwszego jest rozwarty, dlatego że $10^2>8^2+5^2$.

2) Jeżeli boki trójkąta są: 15 cm., 14 cm. i 13 cm., to kąt położony naprzeciw pierwszego jest ostry, dlatego że $15^2<14^2+13^2$.

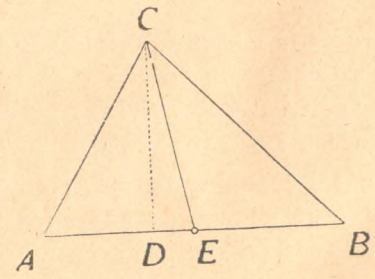
3) Jeżeli boki trójkąta są: 13 cm., 12 cm. i 5 cm., to trójkąt jest prostokątny, dlatego że $13^2=12^2+5^2$.

307. **Wnioski.** 1) Jeżeli w trójkącie ABC (rys. 264) wszystkie trzy boki są dane, to stosując twierdzenie dopiero co udowodnione, mamy:

$$CB^2=AC^2+AB^2-2\,AB\,.\,AD$$



Rys. 264.



Rys. 265.

(albo $+2\,AB.\,AD$, jeżeli kąt A jest rozwarty). W napisanej równości niewiadomy jest tylko odcinek AD, więc można go odnaleźć:

$$AD=\frac{AC^2+AB^2-CB^2}{2\,AB}.$$

Mając zaś AD, możemy z trójkąta prostokątnego ACD obliczyć bok CD czyli wysokość danego trójkąta.

2) W danym trójkącie ABC (rys. 265) niech E będzie środkiem boku AB, więc CE środkową; poprowadźmy wysokość CD względem AB, wtedy z trójkątów ACE i ECB mamy:

$$AC^2=CE^2+AE^2-2\,AE\,.\,DE\ \ldots\ldots\ (1)$$
$$CB^2=CE^2+EB^2+2\,EB\,.\,DE\ \ldots\ldots\ (2)$$

ponieważ $AE=EB=\frac{AB}{2}$, więc dodając, otrzymamy:

$$AC^2+CB^2=2\,CE^2+2\,AE^2,$$

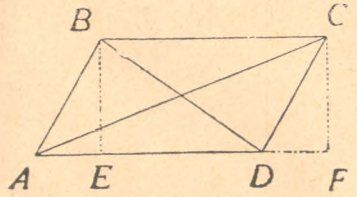
t. j. w trójkącie suma kwadratów dwóch boków jest równa podwójnemu kwadratowi środkowej względem boku trzeciego więcej podwójny kwadrat połowy tego boku.

Na zasadzie tej zależności możemy obliczyć środkową w trójkącie, jeżeli trzy boki są dane.

3) Jeżeli otrzymane poprzednio dwie równości (2) i (1) odejmiemy stronami, otrzymamy

$$CB^2-AC^2=2\,AB\,.\,DE,$$

t. j. w trójkącie różnica kwadratów dwóch boków jest równa podwójnemu iloczynowi boku trzeciego i rzutu na niego linji środkowej względem tegoż boku.



Rys. 266.

4) Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 266), poprowadźmy $BE\perp AD$ i $CF\perp AD$, wtedy z $\triangle ABD$ i ACD mamy:

$$BD^2=AB^2+AD^2-2\,AD.\,AE,$$
$$AC^2=CD^2+AD^2+2\,AD.\,DF.$$

Ponieważ $AE=DF$ i $AD=BC$, więc dodając, otrzymamy:

$$BD^2+AC^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2,$$

t. j. w równoległoboku suma kwadratów przekątnych jest równa sumie kwadratów wszystkich czterech boków.

308. Przypominając własności odcinków proporcjonalnych w kole, możemy o dwóch cięciwach AB i CD, przecinających się wewnątrz koła (rys. 267), powiedzieć, że

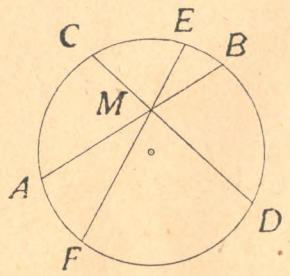
$$AM:DM=MC:MB,$$

a stąd

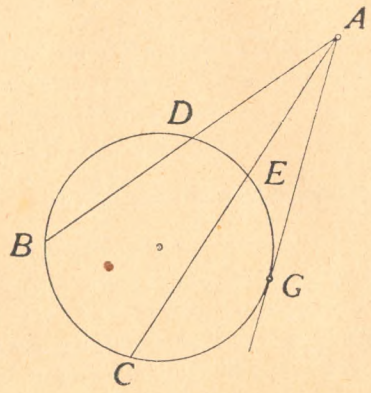
$$AM \cdot MB = DM \cdot MC.$$

Jeśli przez punkt M poprowadzimy jeszcze dowolną cięciwę FE, to będzie

$$AM \cdot MB = DM \cdot MC = FM \cdot ME.$$



Rys. 267.



Rys. 268.

Wogóle: wszystkie cięciwy, przecinające się w jednym punkcie wewnątrz koła, mają tę własność, że iloczyn odcinków każdej cięciwy jest stały.

Jeżeli z pewnego punktu zewnętrznego A (rys. 268) poprowadzimy sieczne do danego koła, to będzie:

$$AB : AC = AE : AD,$$

stąd zaś

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE;$$

a dalej o stycznej AG:

$$AB : AG = AG : AD,$$

skąd

$$AB \cdot AD = AG^2.$$

Gdybyśmy z punktu A wyprowadzili jeszcze jedną sieczną, to znowu iloczyn siecznej i jej odcinka zewnętrznego będzie równy poprzedniemu iloczynowi, wogóle:

jeżeli z punktu, położonego poza kołem, wyprowadzimy ilekolwiek siecznyh do danego koła, to iloczyn każdej siecznej i jej odcinka zewnętrznego będzie stały i równy kwadratowi stycznej, wyprowadzonej z tego samego punktu.

Ponieważ chodzi tu o długość odcinka, więc należy pamiętać, że przez sieczną rozumiemy odcinek, liczony od punktu, z którego została wyprowadzona, do dalszego punktu przecięcia z okręgiem (AB), długością stycznej będzie odcinek (AG), liczony od jej punktu początkowego do punktu styczności.

Uwaga. Łatwo można udowodnić, że nawzajem: jeżeli

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE,$$

to cztery punkty: B, D, E i C leżą na jednym okręgu.

309. **Twierdzenie.** W każdym trójkącie iloczyn dwóch boków jest równy podwójnemu iloczynowi promienia koła opisanego i wysokości względem trzeciego boku.

Na $\triangle ABC$ (rys. 259) opiszmy koło, spuśćmy $BD \perp AC$. Jeżeli poprowadzimy średnicę BE i połączymy punkty E i C, to $\triangle ABD$ będzie podobny do $\triangle BEC$, a to dlatego, że $\sphericalangle A = \sphericalangle E$, jako wpisane oparte na tym samym łuku BC, a $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCE$, jako proste; a więc uważając, że bokowi BD będzie odpowiadał bok BC, a bokowi AB bok BE, otrzymamy proporcję

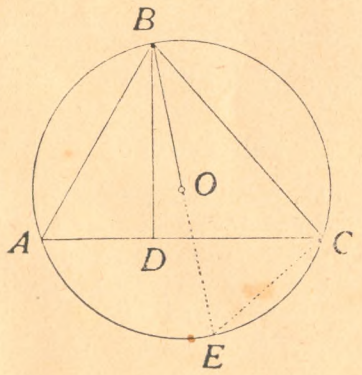
$$\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC},$$

skąd

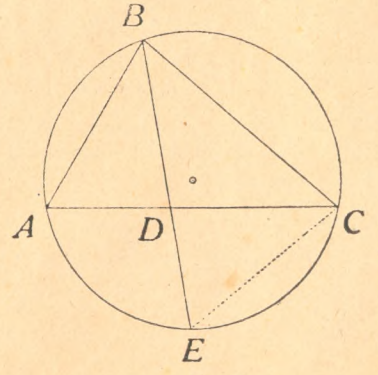
$$AB \cdot BC = BE \cdot BD,$$

czyli

$$AB \cdot BC = 2\,BO \cdot BD \qquad \text{c. b. d. d.}$$



Rys. 269.



Rys. 270.

310. **Twierdzenie.** W każdym trójkącie iloczyn dwóch boków jest równy kwadratowi dwusiecznej kąta między niemi zawartego więcej iloczyn odcinków, na które ta dwusieczna podzieliła bok trzeci.

Na trójkącie ABC (rys. 270) opiszmy koło; jeżeli środek łuku AC, czyli punkt E, połączymy z wierzchołkiem B, to BD będzie dwusieczną kąta ABC.

Połączmy teraz punkty E i C, wtedy będzie $\triangle ABD \sim \triangle BEC$, dlatego że mają $\sphericalangle A = \sphericalangle E$, jako wpisane, oparte na tym samym łuku BC, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBC$, a więc otrzymamy proporcję:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{skąd}$$

$$AB \cdot BC = BD \cdot BE = BD \cdot (BD + DE) = BD^2 + BD \cdot DE \quad (1)$$

Łatwo teraz zauważyć, że $\triangle ABD \sim \triangle DEC$, ponieważ $\sphericalangle A = \sphericalangle E$, a kąty przy punkcie D są równe, jako wierzchołkiem przeciwległe, a zatem

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{DE},$$

skąd $$BD \cdot DE = AD \cdot DC.$$

Podstawiając ten iloczyn w równość (1), mamy:

$$AB \cdot BC = BD^2 + AD \cdot DC, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Uwaga. Na zasadzie tego twierdzenia można obliczyć dwusieczną w trójkącie, mając długości jego boków:

Niech np. $AB = 5$ m, $BC = 10$ m, $AC = 9$ m.

Przedewszystkiem trzeba będzie znaleźć długości odcinków AD i DC, ale, jak wiadomo:

$$AD : DC = AB : BC = 5 : 10 = 1 : 2,$$

a więc podzielmy bok $AC = 9$ m. w stosunku 1 : 2, będziemy mieli $AD = \frac{9 \cdot 1}{3} = 3$ m, $DC = 6$ m.

Z twierdzenia wiemy, że

$$AB \cdot BC = BD^2 + AD \cdot DC,$$

skąd

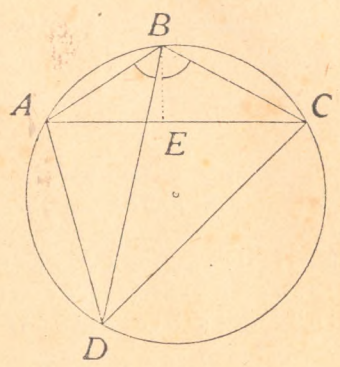
$$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC,$$

czyli

$$BD^2 = 5 \cdot 10 - 3 \cdot 6 = 50 - 18 = 32,$$

a więc

$$BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 5{,}65 \text{ (z błędem } < 0{,}01).$$



Rys. 271.

311. **Twierdzenie (Ptolemeusza).** *) W czworokącie, wpisanym w koło, iloczyn przekątnych równa się sumie iloczynów boków przeciwległych.

Niech będzie dany jakikolwiek czworokąt $ABCD$ (rys. 271) wpisany w koło, mamy dowieść, że

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Z wierzchołka B wyprowadźmy prostą BE tak, aby $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBC$; otrzymamy dwa trójkąty: ABD i EBC, w których $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBC$ z wykreślenia, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ECB$, jako wpisane oparte na tym samym łuku, a więc $\triangle ABD \sim \triangle EBC$, a zatem

$$EC : AD = BC : BD,$$

$$EC \cdot BD = AD \cdot BC \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

stąd zaś

*) Znakomity astronom grecki *Ptolemeusz* z II w. po Chr.

Zauważmy teraz dwa trójkąty: ABE i DBC, w których $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC$, jako złożone z części równych, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BDC$, jako wpisane oparte na tym samym łuku, a więc te trójkąty są do siebie podobne i boki odpowiednie mają proporcjonalne:

$$AE : DC = AB : BD, \text{ stąd zaś } AE \cdot BD = AB \cdot DC \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dodając teraz równości (1) i (2), otrzymamy:

$$AE \cdot BD + EC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC,$$

czyli

$$(AE + EC) \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC,$$

ostatecznie $$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC \qquad \text{c. b. d. d.}$$

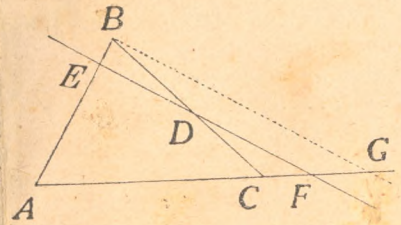
§ 56. O linjach poprzecznych w trójkącie.

312. **Określenie.** Prosta, która przecina boki trójkąta lub ich przedłużenia, nazywa się poprzeczną w trójkącie.

Tak np. w trójkącie ABC (rys. 272) poprzeczna EDF przecina dwa boki i przedłużenie trzeciego i wyznacza 6 odcinków: AE, BE, BD, CD, AF i CF.

W trójkącie ABC (rys. 273) poprzeczna FED przecina przedłużenia wszystkich trzech boków i wyznacza sześć odcinków: AE, BE, CD, DB, CF i AF.

313. **Twierdzenie 1 (Menelausa *).** Wszelka poprzeczna wyznacza na dwóch bokach trójkąta i na przedłużeniu trzeciego (lub na przedłużeniach wszystkich trzech boków) sześć takich odcinków, że iloczyn trzech do siebie nieprzyległych równa się iloczynowi trzech pozostałych.



Rys. 272.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 272) z poprzeczną EDF, mamy dowieść że $AF \cdot CD \cdot EB = BD \cdot AE \cdot CF$.

Przez wierzchołek B poprowadźmy $BG \parallel EDF$, wtedy

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FG},$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CF}{FG}.$$

Przez podzielenie tych proporcyj otrzymujemy:

$$\frac{AE \cdot BD}{EB \cdot CD} = \frac{AF}{CF},$$

czyli $AF \cdot EB \cdot CD = AE \cdot BD \cdot CF$.

*) Matematyk z I w. po Chr.

Tak samo w $\triangle ABC$ (rys. 273) poprowadziwszy $BG \parallel FD$, z podobieństwa $\triangle$-tów FCD i CBG mamy

$$\frac{CD}{BC}=\frac{CF}{CG}, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{BD}{CD}=\frac{FG}{CF},$$

a z podobieństwa $\triangle\triangle$ FAE i ABG:

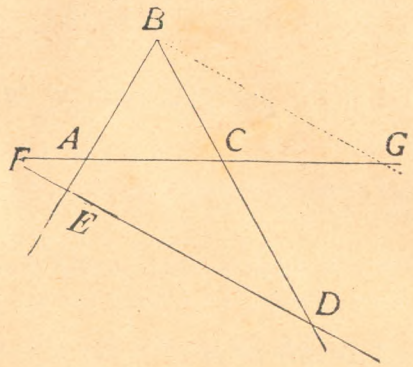
$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AG}, \qquad \text{stąd} \qquad \frac{BE}{AE}=\frac{GF}{AF}.$$

Dzieląc przez siebie ostatnie dwie proporcje, mamy

$$\frac{BD.AE}{CD.BE}=\frac{AF}{CF},$$

czyli

$$BD.AE.CF=AF.CD.BE.$$



Rys. 273.

314. **Twierdzenie 2** (odwrotne). Jeżeli na bokach AB i CB trójkąta ABC (rys. 274) obierzemy dwa dowolne punkty E i D, a na przedłużeniu trzeciego boku taki punkt F, że

$$AE.BD.CF=EB.CD.AF,$$

to trzy punkty: E, D i F leżą na jednej prostej.

Przypuśćmy, że tak nie jest i niech przedłużenie DE przecina przedłużenie boku AC nie w punkcie F, lecz np. w G.

Wtedy na mocy poprzedniego twierdzenia wypadałoby, że

$$AE.BD.CG=EB.CD.AG,$$

ale z założenia mamy

$$AE.BD.CF=EB.CD.AF,$$

stąd przez podzielenie:

$$\frac{CG}{CF}=\frac{AG}{AF},$$

a więc także

$$\frac{CG-CF}{CF}=\frac{AG-AF}{AF},$$

albo

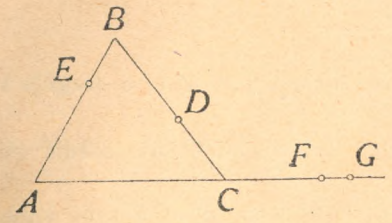
$$\frac{FG}{CF}=\frac{FG}{AF},$$

stąd

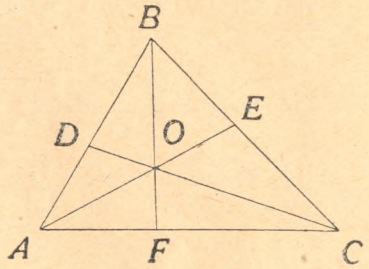
$$CF=AF,$$

co jest niedorzecznością.

315. **Twierdzenie 3 (Cevy** *). Wszelkie trzy proste, wyprowadzone z wierzchołków trójkąta i przecinające się w jednym punkcie, wyznaczają na bokach sześć takich odcinków, że iloczyn trzech z nich do siebie nieprzyległych jest równy iloczynowi trzech pozostałych.



Rys. 274.



Rys. 275.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 275), poprowadźmy proste AE, BF i CD, przecinające się w punkcie O, trzeba dowieść, że

$$AD.BE.CF=BD.CE.AF.$$

Zastosujemy do trójkąta ABF twierdzenie *Menelausa*, uważając DOC za poprzeczną:

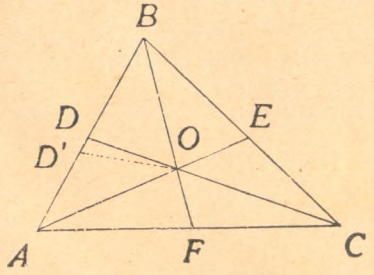
$$AD.BO.CF=BD.OF.AC.$$

W $\triangle BCF$ prosta AE jest poprzeczną, a zatem

$$BE.OF.AC=BO.AF.EC.$$

Mnożąc stronami otrzymane dwie równości, po skróceniu otrzymamy

$$AD.BE.CF=BD.CE.AF, \qquad \text{c. b. d. d.}$$



Rys. 276.

316. **Twierdzenie 4** (odwrotne). Jeżeli trzy proste, wyprowadzone z wierzchołków danego trójkąta, wyznaczają na jego bokach sześć takich odcinków, że iloczyn trzech do siebie nieprzyległych jest równy iloczynowi trzech pozostałych, to te trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ (rys. 276), poprowadźmy proste AE, BF i CD, mamy dowieść, że te proste przecinają się w jednym punkcie.

Założenie: $AD.BE.CF=BD.CE.AF.$

*) Ceva (czytaj „Czewa"), matematyk włoski z XVII w.

Proste AE i BF niech się przecinają w punkcie O; przypuśćmy, że trzecia prosta przez ten punkt nie przechodzi, czyli że przedłużeniem CO jest nie OD, lecz OD'.

Wtedy na mocy poprzedniego twierdzenia możemy napisać:

$$AD' \,.\, BE \,.\, CF = BD' \,.\, CE \,.\, AF,$$

ale z założenia mamy

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = BD \,.\, CE \,.\, AF.$$

Dzieląc stronami otrzymane dwie równości, mamy:

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{BD'}{BD},$$

co jest niedorzecznością, dlatego że pierwszy ułamek jest < 1, a drugi > 1.

317. **Wnioski.** Ostatnie twierdzenie daje łatwy sposób dowiedzenia niektórych ważnych twierdzeń, np.

1) Niech proste AE, CD i BF (rys. 276) będą dwusiecznemi kątów trójkąta ABC, wtedy mamy:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC},$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BC}.$$

Pomnóżmy stronami pierwszą równość przez drugą:

$$\frac{BE \,.\, AD}{EC \,.\, DB} = \frac{AB}{BC},$$

porównawszy to z trzecią równością, otrzymamy

$$\frac{BE \,.\, AD}{EC \,.\, DB} = \frac{AF}{FC},$$

czyli

$$AF \,.\, EC \,.\, BD = AD \,.\, BE \,.\, CF,$$

a to dowodzi, że dwusieczne kątów w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

2) Niech proste AE, CD i BF będą wysokościami, wtedy

$$\triangle ABF \backsim \triangle ACD \text{ i } \frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD},$$

$$\triangle ABE \backsim \triangle DBC \text{ i } \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{DB},$$

$$\triangle BFC \backsim \triangle AEC \text{ i } \frac{BC}{AC} = \frac{FC}{EC}.$$

Jeżeli teraz drugą proporcję pomnożymy przez trzecią, to będzie

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE \,.\, FC}{DB \,.\, EC},$$

a na mocy pierwszej proporcji:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{BE \,.\, FC}{DB \,.\, EC},$$

czyli

$$AF \,.\, BD \,.\, EC = AD \,.\, BE \,.\, FC,$$

a to dowodzi, że proste AE, BF i CD, to jest wszystkie trzy wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

3) Niech proste AE, BF i CD będą środkowemi trójkąta ABC, wtedy

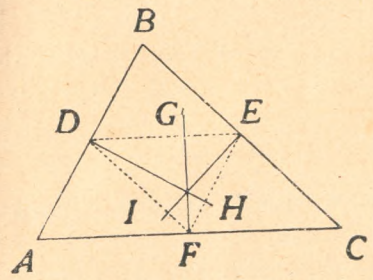
$$AD = DB,$$
$$BE = EC,$$
$$CF = FA,$$

a więc

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = DB \,.\, EC \,.\, AF,$$

to dowodzi, że proste te, t. j. środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

4) Niech punkty D, E i F będą środkami boków trójkąta ABC (rys. 277), wystawmy z tych punktów prostopadłe do boków i połączmy punkty E i F.



Rys. 277.

Wtedy $DE \parallel AC$, a więc $FG \perp DE$,
$EF \parallel AB$, „ $DH \perp EF$,
$DF \parallel BC$, „ $EI \perp DF$,

to znaczy, że proste DH, EI i FG są wysokościami $\triangle DEF$, więc muszą się przecinać w jednym punkcie, a zatem prostopadłe wystawione ze środków wszystkich trzech boków trójkąta, przecinają się w jednym punkcie.

5) Niech punkty D, E i F będą punktami styczności koła wpisanego w trójkąt ABC, wtedy

$$AD = AF$$
$$FC = CE$$
$$BE = BD,$$

a więc: $AD \,.\, FC \,.\, BE = AF \,.\, CE \,.\, BD$,

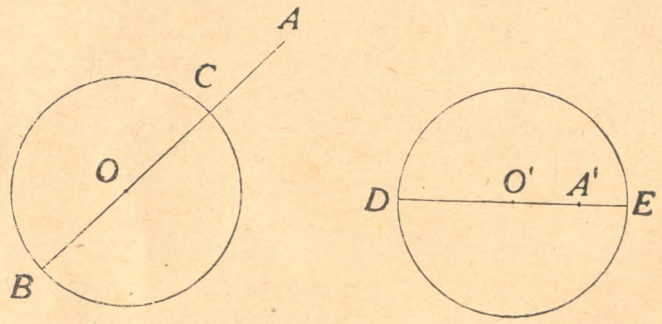
to dowodzi, że proste, które łączą wierzchołki trójkąta z punktami styczności koła wpisanego, przecinają się w jednym punkcie (5-ty punkt szczególny w trójkącie czyli punkt *Gergonne'a*).

§ 57. Potęga punktu względem koła.

318. Jeżeli przez dany punkt poprowadzimy prostą, przecinającą dany okrąg, to otrzymamy dwa odcinki, które wyznaczają odległości (bliższą i dalszą) tego punktu od okręgu.

Potęgą punktu względem koła nazywa się iloczyn odległości tego punktu od okręgu koła. Jakkolwiek odległości punktu od okręgu można mierzyć długością jakiejkolwiek siecznej i jej odcinka zewnętrznego, to jednak potęga punktu nie będzie zależała od kierunku siecznej, dlatego, że jak wiemy, iloczyn siecznej i jej odcinka zewnętrznego jest stały, można więc zawsze, dla znalezienia potęgi danego punktu, poprowadzić sieczną przez środek koła.

Tak np. potęgą punktu A (rys. 278) względem koła O jest iloczyn $AB \,.\, AC$.



Rys. 278.

Jeżeli odległość $AO=d$, a promień koła$=R$, to potęgą punktu A będzie $AB \,.\, AC = (d+R).(d-R) = d^2 - R^2$.

Potęgą punktu A' względem koła O', jeżeli $A'O' = d$, jest iloczyn $A'D \,.\, A'E = (R+d).(R-d) = R^2 - d^2 = -(d^2 - R^2)$.

A więc możemy powiedzieć, że potęga punktu względem koła równa się różnicy $d^2 - R^2$, wziętej ze znakiem dodatnim, jeżeli punkt leży zewnątrz koła i ze znakiem ujemnym, jeżeli leży wewnątrz koła.

Oczywiście, jeżeli punkt leży na okręgu, to jego potęga jest równa zeru.

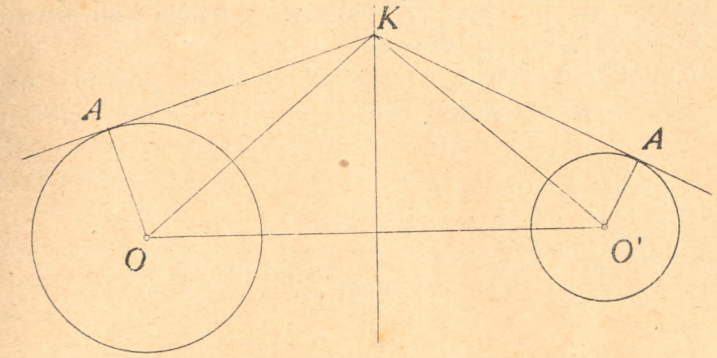
319. **Twierdzenie.** Miejscem geometrycznem punktów, których potęgi względem dwóch kół danych są równe, jest prosta prostopadła do linji środków tych kół.

Niech K (rys. 279) jest jednym z punktów żądanego miejsca geometrycznego. Jeżeli promień pierwszego koła$=R$, a drugiego

R', to potęgą punktu K względem koła O jest $KO^2 - R^2$, a względem koła O' jest $KO'^2 - R'^2$, więc powinno być:

$KO^2 - R^2 = KO'^2 - R'^2$, czyli $KO^2 - KO'^2 = R^2 - R'^2$.

Stąd widzimy, że ruchomy punkt K powinien być wierzchołkiem takiego trójkąta OKO', w którym różnica kwadratów dwóch



Rys. 279.

boków jest stała. A że ta różnica, jak wiemy, równa się 2 OO', pomnożonemu przez rzut środkowej na OO', a OO' jest stałe, więc ten rzut powinien być stały, a to będzie wtedy, jeżeli wierzchołek K leży na prostopadłej do OO', co dowodzi twierdzenia.

320. Miejsce geometryczne punktów jednakowej potęgi względem dwóch kół danych nazywa się linją potęgową tych kół (inaczej osią pierwiastną).

Wniosek 1. Potęga punktu K względem koła O, jak łatwo spostrzec, jest równa kwadratowi stycznej ($KA^2 = KO^2 - AO^2$), więc linja potęgowa dwóch kół jest miejscem geometrycznem punktów, z których styczne, wyprowadzone do tych kół, są równe.

Wniosek 2. Linja potęgowa dwóch przecinających się kół przechodzi przez ich punkty wspólne dlatego, że punkty wspólne mają potęgi równe zeru, a więc te punkty, jako punkty jednakowej potęgi, leżą na linji potęgowej.

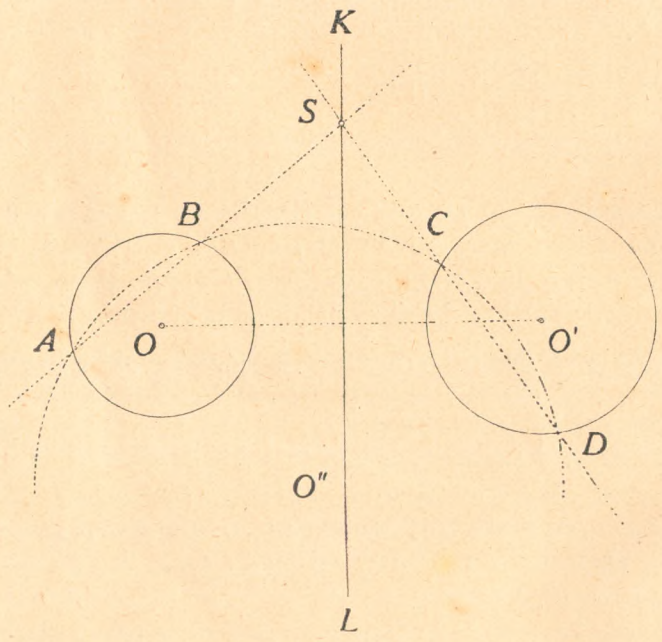
Wniosek 3. Linja potęgowa dwóch kół stycznych przechodzi przez ich punkt styczności.

321. **Twierdzenie.** Jeżeli środki trzech kół nie leżą na jednej prostej, to linje potęgowe tych kół przecinają się w jednym punkcie.

Rzeczywiście, jeżeli środki trzech kół danych O, O', O'' nie leżą na jednej prostej, to proste OO' i OO'' przecinają się, a że linja potęgowa jest prostopadła do linji środków, więc linje potęgowe przetną się z sobą w punkcie, którego potęga względem każdego z trzech kół jest jednakowa.

Punkt przecięcia się linij potęgowych nazywa się środkiem potęgowym trzech kół danych.

Ten punkt jest ważny z tego względu, że pozwala wykreślić bardzo łatwo linję potęgową dwóch kół danych, które się nie przecinają.



Rys. 280.

Jeżeli są dane dwa koła O i O' (rys. 280), to aby odnaleźć linję potęgową, wykreślamy trzecie koło O'', któreby przecinało dwa dane: pierwsze w punktach A i B, drugie w punktach C i D, wtedy AB będzie linją potęgową kół O i O'', CD linją potęgową kół O' i O'' a punkt przecięcia się S tych linij — środkiem potęgowym wszystkich trzech kół. Jeżeli teraz z punktu S spuścimy prostopadłą na linję środków OO', to otrzymamy w ten sposób linję potęgową KL dwóch danych kół.

§ 58. O algebraicznej metodzie konstrukcyj geometrycznych.

322. Jeżeli na symbole a, b, c i t. d. patrzeć będziemy z podwójnego stanowiska, o którem mówiliśmy, traktując je, jako liczby, a z drugiej strony, jako odcinki, to możemy zadania geometryczne, polegające na wykreśleniu pewnego odcinka, zastępować analogicznemi zadaniami rachunkowemi. Nawzajem wzór algebraiczny, który był rezultatem pewnych działań rachunkowych, możemy interpretować geometrycznie czyli podać konstrukcję geometryczną tego wzoru.

Jeżeli np. symbole a i b oznaczają pewne liczby, wtedy wzór

$$x = a \pm b,$$

oznaczający sumę lub różnicę danych liczb, można odtworzyć geometrycznie, traktując a i b, jako odcinki, których liczby wymiarowe są dane. Sumę lub różnicę odcinków zbudować potrafimy.

Na poniższych przykładach poznamy najprostsze, a zarazem podstawowe zadania na interpretację geometryczną wzorów algebraicznych.

Zadanie 1. Wykreślić odcinek x według wzoru:

$$x = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Jeżeli dany wzór napiszemy w postaci proporcji: $c : b = a : x$, to widzimy, że zadanie polegać będzie na wykreśleniu odcinka czwartego proporcjonalnego do trzech danych.

Zadanie 2. Wykreślić odcinek x według wzoru:

$$x = \frac{a^2}{b}.$$

Napiszmy znowu proporcję: $b : a = a : x$ i mamy znane już zadanie o odcinku trzecim proporcjonalnym do dwóch danych.

Zadanie 3. Wykreślić $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot f}$.

Znajdźmy naprzód, jak w zadaniu 1:

$$y = \frac{b \cdot c}{f}, \quad (f : c = b : y)$$

a potem

$$x = \frac{a \cdot y}{d}, (d : y = a : x).$$

Zadanie 4. Wykreślić

$$x = \sqrt{a \cdot b}.$$

Napiszmy naprzód $x^2 = a \cdot b$, a potem

$$b : x = x : a$$

i widzimy, że zadanie polega na wykreśleniu odcinka średniego proporcjonalnego między dwoma danemi.

Zadanie 5. Wykreślić $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Odcinek x będzie przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, w którym przyprostokątne są a i b.

Jeżeli $x = \sqrt{a^2 - b^2}$,

to łatwo domyśleć się geometrycznego charakteru x.

Zadanie 6. Wykreślić $x = \sqrt{ab + cd}$.

Wykreślmy naprzód

$$z = \sqrt{ab} \text{ i } u = \sqrt{cd},$$

a potem

$$x = \sqrt{z^2 + u^2}.$$

Zadanie 7. Wykreślić $x = a\sqrt{3}$.

Mamy $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$,

skąd widzimy, że x jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego.

Inaczej $x = \sqrt{3a \cdot a} = \sqrt{1^1/_2 a \cdot 2a}$; dalej, jak zadanie 4.

Zadanie 8. Znaleźć dwa odcinki, których suma $= a$, a iloczyn $= b^2$.

Odcinek a bierzemy za średnicę koła, b za prostopadłą, spuszczoną z punktu okręgu na średnicę, wtedy odcinki prostopadłej będą żądane (patrz 304).

Wniosek. Podany sposób daje zarazem rozwiązanie graficzne równania kwadratowego $x^2 - ax + b^2 = O$, jeżeli przez a i b rozumiemy liczby wymiarowe odcinków danych, gdyż jak wiadomo, suma pierwiastków tego równania $= a$, a iloczyn $= b^2$.

Jeżeli równanie ma postać $x^2 + ax + b^2 = O$, to obydwa pierwiastki będą ujemne i ich wartości bezwzględne będą takie same, jak w równaniu poprzedniem.

Zadanie 9. Znaleźć dwa odcinki, których różnica $= a$, a iloczyn $= b^2$.

Zadanie rozwiązuje się na zasadzie twierdzenia o siecznej i stycznej, wyprowadzonych z tego samego punktu zewnątrz koła (patrz 308). Średnicą będzie odcinek a, długością stycznej (poprowadzonej przez koniec średnicy) będzie b, wtedy sieczna, wyprowadzona z końca stycznej i przechodząca przez środek koła, będzie większym odcinkiem żądanym, a jej odcinek zewnętrzny mniejszym.

Wniosek. Podany sposób daje rozwiązanie równania $x^2 + ax - b^2 = O$, jeżeli a i b są liczbami wymiarowemi odcinków danych; równanie ma tylko jeden pierwiastek dodatni i będzie mu odpowiadała sieczna, a jej odcinek zewnętrzny będzie odpowiadał bezwzględnej wartości drugiego pierwiastka—ujemnego.

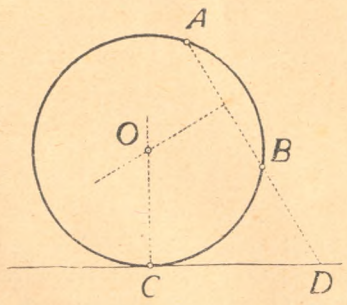
Jeżeli równanie ma postać: $x^2 - ax - b^2 = O$, to rozwiązanie pozostanie to samo, tylko role pierwiastków będą zmienione.

Zadania (10—17). Wykonać konstrukcje geometryczne następujących wzorów:

10. $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$.
11. $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$.
12. $x = \sqrt{a^2 + ab}$.
13. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.
14. $x = \sqrt[4]{ab^3 + a^2b^2}$.
15. $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.
16. $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$.
17. $x = \sqrt[4]{abcd}$.

Zadanie 18. Wykreślić koło, którego okrąg przechodzi przez dwa dane punkty i jest styczny do prostej danej.

Analiza. Dane są punkty A i B (rys. 281) oraz prosta; przypuśćmy, że żądane koło jest wykreślone i punktem styczności z prostą jest punkt C.



Rys. 281.

Jeżeli przez dane punkty A i B poprowadzimy prostą ABD, to spostrzeżemy, że punkt D na danej prostej jest wyznaczony, chodzić więc będzie tylko o wyznaczenie punktu styczności C, czyli o znalezienie odcinka DC.

Na zasadzie wiadomej własności siecznej i stycznej do koła, mamy

$$DC^2 = DA \cdot DB,$$

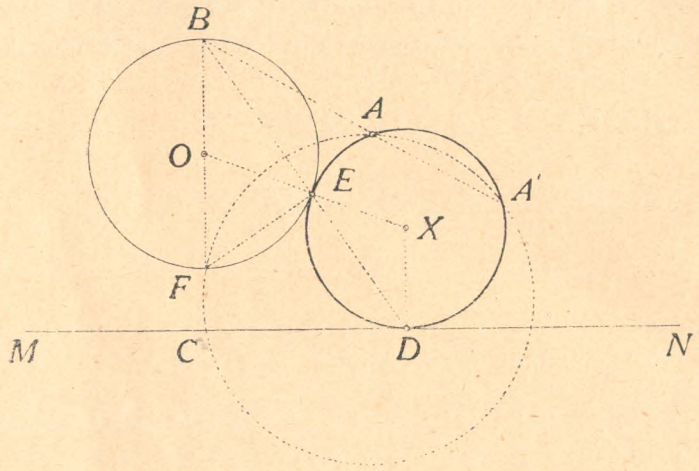
a stąd

$$DC = \sqrt{DA \,.\, DB}.$$

Ponieważ odcinki DA i DB są wiadome, więc zadanie polegać będzie na konstrukcji otrzymanego wzoru (patrz zadanie 4).

Zadanie 19. Wykreślić koło, którego okrąg przechodzi przez punkt dany i jest styczny do prostej i do koła danego.

Analiza. Dany jest punkt A, prosta MN i koło O (rys. 282), środkiem koła żądanego niech będzie X.



Rys. 282.

Połączmy punkty styczności D i E i przedłużmy prostą DE do punktu B, z punktu B wyprowadźmy średnicę, która przetnie daną prostą w punkcie C. Z równości kątów CBD i EDX $(=BEO=DEX)$ wnosimy, że proste BC i XD są równoległe, a zatem BC jest prostopadła do MN.

Dalej z podobieństwa trójkątów prostokątnych CBD i FBE mamy

$$BC \,.\, BF = BD \,.\, BE.$$

Ale, jeżeli poprowadzimy prostą BAA', to

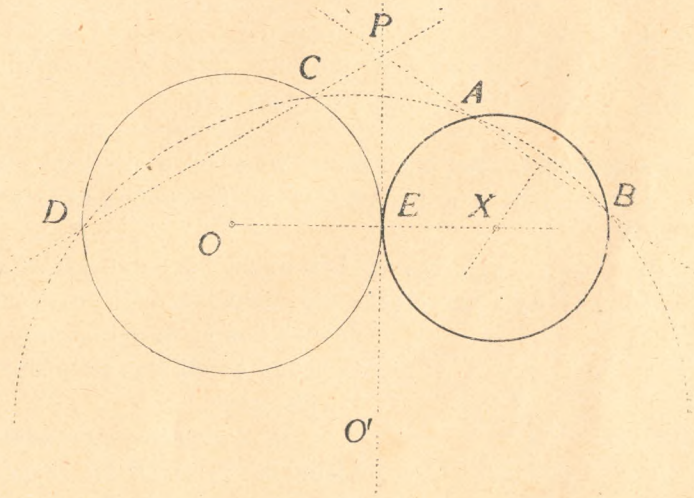
$$BD \,.\, BE = BA' \,.\, BA, \text{ więc}$$

$$BC \,.\, BF = BA' \,.\, BA.$$

Stąd wnioskujemy, że 4 punkty: C, F, A i A' leżą na jednym okręgu, a że 3 z nich: C, F i A są wiadome, więc poprowadziwszy przez nie okrąg, otrzymamy, jako przecięcie z prostą BA, punkt A'. W taki sposób żądane koło będzie wyznaczone przez 2 punkty (A i A') i prostą (MN), t. j. sprowadza się do zadania 18.

Zadanie 20. Wykreślić koło, którego okrąg przechodzi przez dwa punkty dane i jest styczny do koła danego.

Analiza. Dane są 2 punkty: A i B i koło O (rys. 283), środkiem koła żądanego niech będzie X. Przez punkty A i B poprowadźmy jakiekolwiek koło,



Rys. 283.

przecinające koło dane w punktach C i D. Przecięcie prostych AB i CD, t. j. punkt P będzie środkiem potęgowym tych kół, a więc prowadząc z tego punktu styczną do koła O, czyli linję potęgową kół O i X, otrzymujemy w przecięciu z OX punkt styczności E.

A więc środek X znajdziemy, jako przecięcie prostej OE z prostopadłą, wystawioną ze środka odcinka AB.

Uwaga. Ostatnie trzy zadania stanowią fragment znanego zagadnienia *Apolonjusza* o kole stycznem.

§ 59. Wielokąty foremne.

323. **Określenie.** Wielokąt nazywa się foremnym, jeżeli ma wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

Trójkąt równoboczny jest foremny dlatego, że jeżeli ma boki równe, to i kąty ma równe. Kwadrat jest czworokątem foremnym.

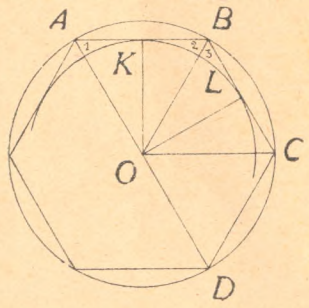
Wniosek 1. Jeżeli wielokąt ma n boków, to jak wiadomo, suma wszystkich kątów wewnętrznych $= 180^0 . (n-2)$, a więc każdy kąt $= \frac{180^0 . (n-2)}{n}$. Np. w 6-kącie foremnym każdy kąt $= \frac{180^0 . 4}{6} = 120^0$, w 10-kącie foremnym:

$$\frac{180^0 . 8}{10} = 144^0 \text{ itd.}$$

Wniosek 2. Wielokąty foremne o jednakowej liczbie boków są do siebie podobne, gdyż kąty będą miały równe, a boki proporcjonalne, co jest oczywiste.

324. **Twierdzenie.** Na każdym wielokącie foremnym można opisać koło i w każdy wielokąt foremny można wpisać koło.

Podzielmy dwa kąty, np. A i B (rys. 284) danego wielokąta foremnego na połowy, przecięcie się dwusiecznych oznaczmy O; dowiedziemy, że ten punkt będzie zarazem środkiem koła opisanego i wpisanego.



Rys. 284.

1) Zauważmy przedewszystkiem, że $\triangle AOB$ ma kąty 1 i 2 równe, jako połowy kątów równych, a więc i przeciwległe boki ma równe, czyli $AO = OB$. Trójkąty AOB i BOC są sobie równe dlatego, że mają $AB = BC$ z założenia, $OB = OB$, jako bok wspólny, a $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$, jako połowy kąta B, stąd zaś wynika, że $\triangle BOC$ jest także równoramienny czyli $BO = CO$. W taki sam sposób można dowieść, że i $\triangle COD$ jest równoramienny, czyli $CO = DO$ i t. d. Widzimy, że $AO = BO = CO = DO \ldots$; więc jeżeli z punktu O, jako środka, promieniem AO lub BO, lub CO i t. d. zakreślimy okrąg koła, to on przejdzie przez wszystkie wierzchołki wielokąta czyli będzie okręgiem opisanym na tym wielokącie.

2) Z punktu O spuśćmy prostopadłe $OK, OL \ldots$ na boki wielokąta, wtedy $OK = OL$, jako wysokości trójkątów równych, stąd zaś wynika, że jeżeli z punktu O, jako środka, promieniem $OK = OL = \ldots$ zakreślimy okrąg koła, to otrzymamy koło styczne do boków wielokąta, czyli otrzymamy koło, w ten wielokąt wpisane.

Uwaga 1. Punkt O, jako środek koła opisanego i wpisanego, nazywa się środkiem wielokąta foremnego.

Uwaga 2. Prostopadła OK, OL i t. d. czyli promień koła wpisanego nazywa się inaczej apotemą wielokąta, a promień koła opisanego — poprostu promieniem wielokąta.

Wniosek 1. W wielokącie foremnym promień przechodzący przez wierzchołek jest zarazem dwusieczną kąta, co jest widoczne.

Wniosek 2. W wielokącie foremnym apotema dzieli bok odpowiedni na połowy, dlatego że jest prostopadła do cięciwy.

Wniosek 3. Obwody wielokątów foremnych o jednakowej liczbie boków tak się mają do siebie, jak ich promienie lub apotemy.

Rys. 285.

Jeżeli dane wielokąty mają jednakową liczbę boków (rys. 285), to są do siebie podobne, a więc ich obwody są proporcjonalne do boków, ale trójkąty AOB i $A'O'B'$ są podobne, a więc:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OK}{O'K'}.$$

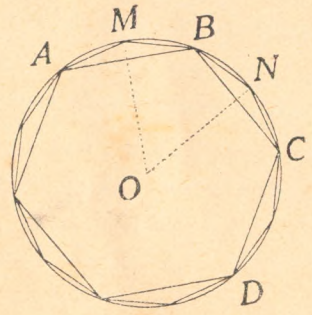
Stąd wynika, że obwody są proporcjonalne do promieni lub apotem.

325. **Twierdzenie.** Jeżeli okrąg koła podzielimy na części równe i punkty podziału połączymy kolejno cięciwami, to otrzymamy wielokąt foremny wpisany.

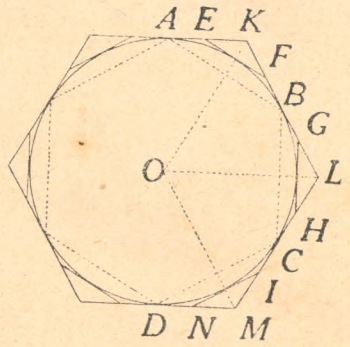
Niech będzie $AB=BC=CD$ i t. d. (rys. 286).

Zauważmy naprzód, że ten wielokąt ma boki równe, jako cięciwy odpowiadające łukom równym, a kąty ma równe, jako wpisane oparte na łukach równych, a więc wielokąt jest foremny.

Wniosek. Jeżeli poprowadzimy $OM \perp AB$, $ON \perp BC$ i t. d., to wielokąt $AMBN\ldots$ będzie foremny o dwa razy większej liczbie boków. W ten sposób zawsze można podwoić liczbę boków wielokąta foremnego.



Rys. 286.



Rys. 287.

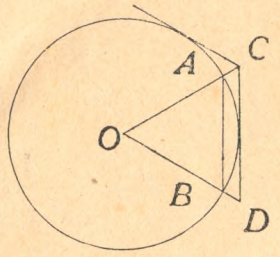
326. **Twierdzenie.** Jeżeli okrąg koła podzielimy na części równe i przez punkty podziału poprowadzimy styczne, to otrzymamy wielokąt foremny opisany.

Niech będzie $AB=BC=CD$ i t. d. (rys. 287), poprowadźmy przez punkty A, B, C i t. d. styczne do koła, dowiedziemy, że wielokąt $KLM\ldots$ jest foremny.

Połączmy kolejno ze sobą punkty A, B, C i t. d., wtedy trójkąty AKB, BLC, CMD i t. d. będą równe, dlatego że mają po jednym boku równym: $AB=BC=CD\ldots$ (jak widzieliśmy z poprzedniego twierdzenia) i po dwa kąty do niego przyległe równe, a więc: 1) $\sphericalangle K=\sphericalangle L=\sphericalangle M$ i t. d.

2) $AK=KB=BL=LC$ i t. d., a więc $KL=LM$ i t. d. Stąd wnosimy, że wielokąt $KLM\ldots$ jest foremny.

Wniosek. Jeżeli wierzchołki K, L, $M\ldots$ (rys. 287) połączymy ze środkiem koła i przez otrzymane punkty przecięcia poprowadzimy styczne, to otrzymamy wielokąt foremny $EFGHIN\ldots$ o dwa razy większej liczbie boków. W ten sposób zawsze można podwoić liczbę boków wielokąta opisanego.



Rys. 288.

Uwaga. Jeżeli w koło jest wpisany wielokąt foremny, to wielokąt opisany o tej samej liczbie boków można otrzymać, prowadząc styczne równoległe do boków wielokąta wpisanego (rys. 288).

327. **Zadanie.** W koło wpisać czworokąt foremny.

Jeżeli w kole poprowadzimy dwie prostopadłe do siebie średnice i ich końce połączymy cięciwami, to otrzymamy żądany czworokąt foremny czyli kwadrat.

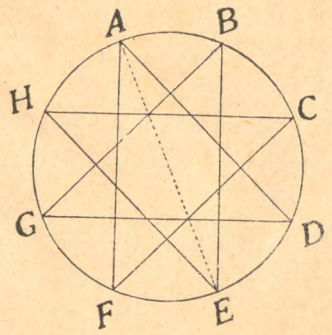
Wniosek. Łącząc końce jednego z boków kwadratu ze środkiem koła, otrzymamy trójkąt prostokątny. Jeżeli bok kwadratu oznaczymy przez a_4, a promień koła przez R, to z trójkąta prostokątnego będziemy mieli:

$$a_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

$$a_4 = \sqrt{2R^2},$$

$$a_4 = R\sqrt{2}$$

t. j. bok kwadratu wpisanego w koło równa się promieniowi pomnożonemu przez $\sqrt{2}$.

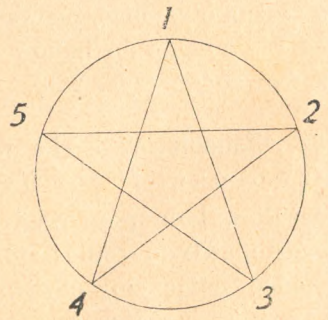


Rys. 289.

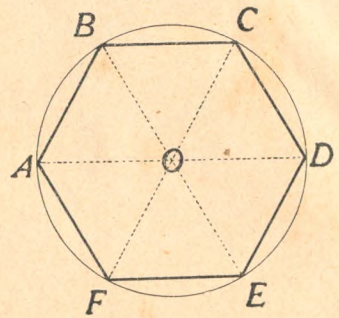
Uwaga. Jeżeli okrąg koła podzielimy znanym już sposobem na 8 części równych: $AB=BC=CD$ i t. d. (rys. 289), ale punkty podziału połączymy cięciwami nie kolejno, lecz co trzeci, mianowicie pierwszy z czwartym, czwarty z siódmym i t. d., jak wskazuje rysunek, to otrzymamy 8-kąt $ADGBEHCFA$, który będzie oczywiście foremny. Taki wielokąt nazywa się gwiaździstym.

Jeżeli okrąg koła podzielimy wogóle na n części równych, to wielokąt gwiaździsty otrzymamy, łącząc punkty podziału co k-ty, jeżeli liczba k jest pierwsza względem n, np. 8-kąt gwiaździsty otrzymaliśmy, łącząc punkty podziału co 3-ci. Ponieważ 5 jest liczbą rów-

nież pierwszą względem 8, można otrzymać jeszcze 8-kąt gwiaździsty, łącząc punkty co 5-ty, ale łatwo spostrzec, że to będzie ten sam wielokąt. Wogóle liczba k powinna być pierwsza względem n i mniejsza od $\frac{n}{2}$. Np. 5-kąt gwiaździsty otrzymamy, łącząc punkty podziału co 2-gi (rys. 290 *).



Rys. 290.



Rys. 291.

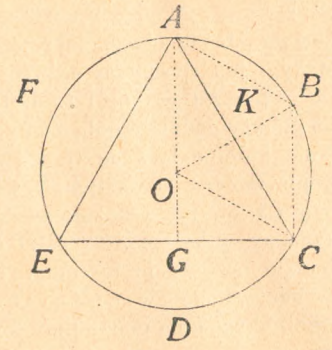
328. **Zadanie.** W koło wpisać 6-kąt foremny.

Analiza. Niech cięciwa AB (rys. 291) będzie bokiem 6-kąta foremnego, połączmy jej końce ze środkiem koła, wtedy w $\triangle AOB$

$$\text{kąt } AOB = \frac{360^0}{6} = 60^0,$$

a więc $\sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 180^0 - 60^0 = 120^0$, a że to jest trójkąt równoramienny, więc każdy z tych dwóch kątów$=60^0$, a zatem w $\triangle AOB$ wszystkie kąty są sobie równe, stąd zaś wnosimy, że

$$AB = AO = OB.$$



Rys. 292.

Łatwo już spostrzec sposób konstrukcji: odmierzyć promień na okręgu, w którym pomieści się ściśle sześć razy.

Wniosek 1. Widzieliśmy, że $AB = AO$, czyli oznaczając $AB = a_6$, $AO = R$, mamy $a_6 = R$,

*) Taka właśnie figura używana była przez Pitagorejczyków, jako symbol zjednoczenia; stąd wnioskujemy, że wykreślanie 5-kąta foremnego było już im znane.

t. j. bok sześciokąta foremnego jest równy promieniowi.

Wniosek 2. Podzielmy okrąg koła na 6 części równych (rys. 292) i połączmy punkty podziału co 2-gi, otrzymamy trójkąt foremny ACE, którego bok można obliczyć w następujący sposób:

Połączmy B ze środkiem koła i z punktami A i C, następnie punkty A i C ze środkiem koła, wtedy AB i BC, jako boki sześciokąta, są równe $AO = OC$, a więc czworokąt $AOCB$ jest równoległobokiem, a zatem:

$$AC^2 + OB^2 = AO^2 + OC^2 + CB^2 + AB^2,$$

czyli

$$a_3^2 + R^2 = 4R^2,$$
$$a_3^2 = 3R^2,$$
$$a_3 = R\sqrt{3}$$

t. j. bok trójkąta foremnego równa się promieniowi pomnożonemu przez $\sqrt{3}$.

Uwaga. Z równoległoboku $AOCB$ widzimy jeszcze, że $OK = \frac{OB}{2}$, ale $OK \perp AC$, bo ten równoległobok jest rombem, więc $OK = r_3$ jest apotemą trójkąta AEC, a zatem:

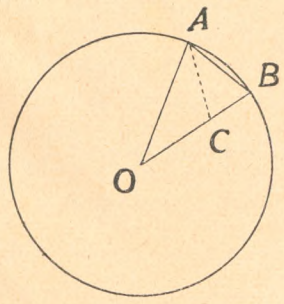
$$r_3 = \frac{R}{2},$$

t. j. w trójkącie foremnym apotema jest równa połowie promienia.

AG jest wysokością trójkąta ACE i jak widzimy:

$$AG = AO + OG = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R,$$

t. j. w trójkącie foremnym wysokość jest równa $1^1/_2$ promienia.



Rys. 293.

329. **Zadanie.** W koło wpisać 10-ciokąt foremny.

Analiza. Niech cięciwa AB (rys. 293) będzie bokiem 10-kąta foremnego, połączmy jej końce ze środkiem koła, wtedy w trójkącie równoramiennym AOB:

$$\sphericalangle AOB = \frac{360^0}{10} = 36^0,$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0.$$

Podzielmy kąt A dwusieczną AC na połowy, wtedy w $\triangle ACO$ dwa kąty, położone przy boku AO, będą równe (każdy po 36^0), a więc $OC = AC$.

W trójkącie ABC kąt ACB będzie zawierał $180^0 - (36^0 + 72^0) = 72^0$, a więc dwa kąty położone przy boku CB są równe, a zatem $AC = AB$.

Widzimy więc, że $AB = AC = CO$.

Ażeby znaleźć odcinek OC, przypomnijmy własność dwusiecznej:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{OA}{AB}$$

czyli

$$\frac{OC}{CB} = \frac{OB}{OC}$$

albo

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB}$$

a to znaczy, że promień OB w punkcie C został podzielony w stosunku średnim i skrajnym.

A więc bok dziesięciokąta foremnego równa się większej części promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym (inaczej: równa się złotej części promienia).

Stąd już wynika sposób konstrukcji: dzielimy promień w stosunku średnim i skrajnym, większą część odmierzamy na okręgu i punkty podziału łączymy kolejno.

Wniosek 1. Wartość boku $AB = a_{10}$ obliczamy z otrzymanej poprzednio proporcji:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB},$$

gdzie $OB = R$, $OC = AB = a_{10}$, $CB = R - a_{10}$, więc będzie

$$\frac{R}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{R - a_{10}},$$

$$a_{10}^2 = R^2 - Ra_{10},$$

$$a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0.$$

Rozwiązując to równanie względem a_{10} i biorąc tylko pierwiastek dodatni, mamy:

$$a_{10} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2},$$

$$a_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

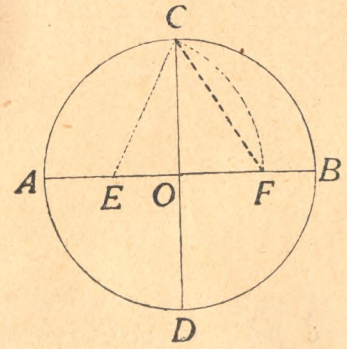
Wniosek 2. Jeżeli otrzymany wzór na a_{10} napiszemy w postaci

$$a_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{5} - \frac{R}{2}$$

i zauważymy, że

$$\frac{R}{2}\sqrt{5} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

to wykreślenia boku dziesięciokąta foremnego (wypukłego) można dokonać w sposób następujący:



Rys. 294.

W danem kole (rys. 294) poprowadźmy dwie do siebie prostopadłe średnice: AB i CD, środek E promienia AO połączmy z punktem C i następnie z punktu E promieniem EC zatoczmy łuk, który przetnie średnicę AB w punkcie F, wtedy odcinek OF będzie bokiem 10-kąta foremnego.

Można przekonać się, że odcinek CF będzie bokiem pięciokąta foremnego.

330. **Zadanie.** W koło wpisać 15-kąt foremny.

Analiza. Ponieważ $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, wnosimy, że łuk odpowiadający 15-kątowi jest równy różnicy pomiędzy łukiem sześciokąta i dziesięciokąta.

331. **Zadanie.** Mając promień koła oraz bok wielokąta foremnego wpisanego, obliczyć bok wielokąta foremnego o dwa razy większej liczbie boków, wpisanego w to samo koło.

Niech $AB = a_n$ (rys. 295) będzie bokiem wielokąta foremnego wpisanego o n bokach i promień $OA = R$; jeżeli poprowadzimy $OC \perp AB$, to $AC = a_{2n}$ będzie bokiem wielokąta o podwójnej liczbie boków. Aby obliczyć AC, zastosujemy tu wiadomą własność cięciwy:

$$AC^2 = CE \cdot CD,$$

ale

$$AC = a_{2n},$$

$$CE = 2R,$$

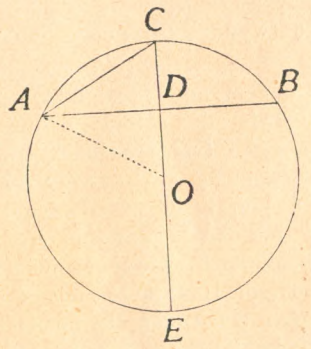
$$CD = CO - DO = R - \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

więc będzie:

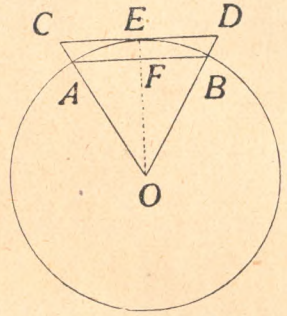
$$a_{2n}^2 = 2R \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right) = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Na zasadzie tego wzoru, mając np. wartość boku 4-kąta foremnego, można obliczyć bok wielokąta foremnego o ośmiu, szesnastu i t. d. bokach.



Rys. 295.



Rys. 296.

332. **Zadanie.** Mając promień koła i bok wielokąta foremnego wpisanego, obliczyć bok wielokąta foremnego o tej samej liczbie boków, opisanego na tem kole.

Niech $AB = a_n$ (rys. 296) będzie bokiem n-kąta foremnego wpisanego, poprowadźmy styczną $CD \parallel AB$, wtedy $CD = b_n$ będzie bokiem n-kąta opisanego, promień $OE = R$.

Z podobieństwa trójkątów CDO i ABO mamy: $\frac{CD}{AB} = \frac{OE}{OF}$,

ale

$$CD = b_n,$$
$$AB = a_n,$$
$$OE = R,$$

$$OF = \sqrt{AO^2 - AF^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

więc

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Stąd:

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

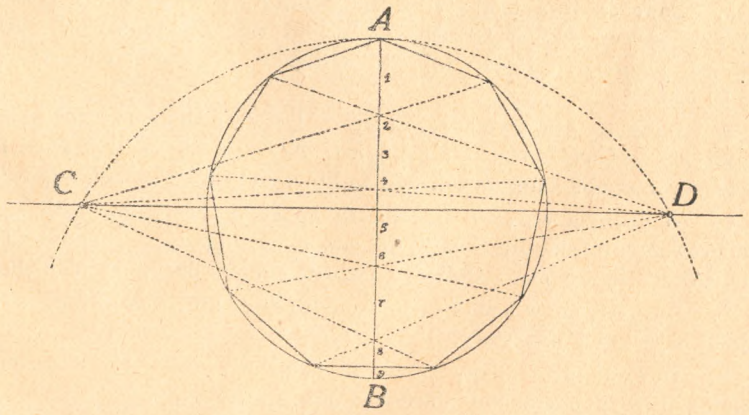
Na zasadzie tego wzoru możemy obliczyć np. bok 6-kąta opisanego:

$$n = 6;\ b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2}{3} R\sqrt{3}.$$

333. Poznaliśmy sposoby podziału okręgu na 2^n, 3.2^n, 5.2^n i $3.5.2^n$ części równych. Matematyk *Gauss* dowiódł, że zapomocą cyrkla i linjału można podzielić okrąg na n części równych, jeżeli n jest potęgą dwóch, albo jest liczbą pierwszą o postaci $2^k + 1$, a więc można podzielić okrąg na

2, 4, 8, 16, 32 ... części równych, albo na
3, 5, 17 ... części równych.

Można podzielić również na części, których liczba równa się iloczynowi tych liczb, np. na $3 . 5 = 15$; $3 . 17 = 51$ i t. d...



Rys. 297.

Podział okręgu na 7, 9, 11, 13 itd. części równych zapomocą cyrkla i linjału jest niemożliwy, a jeżeli w praktyce trzeba taki podział wykonać, używa się sposobów przybliżonych (niedokładnych).

Jeden z takich sposobów praktycznych, znany pod nazwą sposobu *Rinaldini'ego*, jest następujący:

Aby okrąg podzielić na 9 części równych, dzielimy średnicę pionową AB (rys. 297) na tyleż części, z punktu B promieniem AB zakreślamy łuk, który przetnie przedłużenie średnicy poziomej w punktach C i D. Połączmy te dwa punkty ze wszystkiemi parzystemi punktami podziału średnicy AB, a więc z 2-im, 4-ym itd. i przedłużmy te linje aż do przecięcia się z okręgiem; otrzymamy w ten sposób na okręgu dziewięć wierzchołków żądanego wielokąta wpisanego.

§ 60. Ćwiczenia.

1. Wykreślić bez przenośnika kąt zawierający $67^1/_2{}^0$.

2. Ile stopni ma kąt, który opisuje większa wskazówka zegarowa w przeciągu 5 minut?

3. Okrąg koła podzielono na 4 części w stosunku $2:3:5:6$ i punkty podziału połączono kolejno odcinkami. Obliczyć kąty otrzymanego 4-kąta wpisanego.

4. Okrąg koła podzielono na trzy części w stosunku $8:9:10$ i w punktach podziału poprowadzono styczne do koła. Obliczyć kąty otrzymanego trójkąta opisanego.

5. Dane są dwa trójkąty: ABC i DEF, w których: $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, bok $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm, $EF = 36$ cm, $DE = 30$ cm. Czy te trójkąty są podobne? Jeżeli tak, to obliczyć długość boku AC, mając $DF = 16$ cm.

6. Dane są dwa trójkąty: ABC i DEF, w których $AB = 36$ cm, $BC = 40$ cm, $AC = 16$ cm, $DF = 6$ cm, $ED = 13{,}5$ cm i $EF = 15$ cm. Czy te trójkąty są podobne? Jeżeli tak, to które boki będą w nich odpowiednie?

7. W jednym z dwóch podobnych do siebie trójkątów boki są odpowiednio równe: 25 cm, 35 cm, i 40 cm, a największy z boków drugiego trójkąta równa się 50 cm. Obliczyć pozostałe boki drugiego trójkąta.

8. Dowieść, że w każdym trójkącie iloczyn któregokolwiek boku i odpowiedniej wysokości jest stały.

9. Dowieść, że trójkąt, w którym jedna z wysokości jest średnia proporcjonalna między odcinkami podstawy, jest prostokątny.

10. Dowieść, że trójkąt jest prostokątny, jeżeli jeden z jego boków jest średni proporcjonalny między drugim bokiem a rzutem na niego boku pierwszego.

11. Dowieść, że dwa trójkąty są podobne, jeżeli mają po kącie równym i jeżeli wysokości względem boków obejmujących te kąty są do siebie proporcjonalne.

12—15. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono dwie wysokości: $BD \perp AC$ i $CE \perp AB$, punktem przecięcia się tych wysokości jest O.

Dowieść, że:

12. $EO \cdot OC = BO \cdot OD$.
13. $AB \cdot AE = AC \cdot AD$.
14. $AD \cdot DC = BD \cdot OD$.
15. $AE \cdot EB = CE \cdot EO$.

16. Dowieść, że prosta, która przechodzi przez spodki dwóch wysokości trójkąta ostrokątnego, odcina trójkąt do niego podobny.

17. Dowieść, że miejscem geometrycznem punktów, których suma kwadratów odległości od dwóch danych punktów A i B jest stała, jest okrąg koła, zakreślony ze środka odcinka AB. Wykonać konstrukcję.

18. Dowieść, że miejscem geometrycznem punktów, których różnica kwadratów odległości od dwóch danych punktów A i B jest stała, jest prosta prostopadła do AB.

19. Obwód trójkąta $= 30$ cm, dwusieczna jednego z jego kątów dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki odpowiednio równe: 4 cm i 8 cm. Obliczyć boki trójkąta.

20. Podstawy trapezu są odpowiednio równe: 13,2 cm i 17,6 cm; jeden z boków nierównoległych $= 7{,}7$ cm. Na jaką odległość należy przedłużyć ten bok, żeby się przeciął z przedłużeniem drugiego boku nierównoległego?

21. W trójkąt wpisano kwadrat, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie trójkąta, a dwa pozostałe na innych bokach. Obliczyć bok tego kwadratu, jeżeli podstawa trójkąta $= 24$ cm, a wysokość $= 20$ cm.

22. Jaka powinna być najmniejsza wysokość pionowo stojącego lustra, żeby człowiek, oddalony od niego o d cm., mający wzrost $= a$ cm., mógł się przejrzeć w całości?

23. Korzystając z tożsamości:

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2,$$

można otrzymać dowolną ilość trójkątów prostokątnych o bokach spółmiernych (czyli t. zw. trójkątów wymiernych), jeżeli zamiast m i n będziemy podstawiali liczby całkowite. Najprostszym przypadkiem będzie, kiedy weźmiemy $m=2$ i $n=1$, wtedy otrzymamy trójkąt prostokątny zw. egipskim o bokach 3, 4 i 5. Oczywiście wszystkie trójkąty do niego podobne, a więc mające boki: $3k$, $4k$ i $5k$, będą również prostokątne. Dla wyłączenia takich trójkątów należy za m i n podstawiać liczby względem siebie pierwsze, a jedna z nich powinna być parzysta.

Postępując w ten sposób, otrzymamy trójkąty prostokątne o bokach a, b, c:

$m=2.$	3.	4.	4.	5.	5.	6.	
$n=1.$	2.	1.	3.	2.	4.	1.	
$a=3.$	5.	15.	7.	21.	9.	35.	
$b=4.$	12.	8.	24.	20.	40.	12.	
$c=5.$	13.	17.	25.	29.	41.	37.	i t. d.

Pamiętając, że c oznacza przeciwprostokątną, a i b — przyprostokątne i biorąc którykolwiek z otrzymanych w ten sposób trójkątów, obliczyć:

a) wysokość poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego,

b) odcinki, na które została podzielona przeciwprostokątna.

24—27. Mając trzy boki trójkąta: a, b i c, obliczyć:

24. jedną z wysokości,

25. środkową,

26. dwusieczną,

27. promień koła opisanego na trójkącie.

Przykłady liczbowe:

$a = 56.$	63.	21.	33.	11.	14.	4.
$b = 25.$	25.	20.	25.	20.	15.	15.
$c = 39.$	52.	13.	52.	13.	13.	13.

28. Bok trójkąta równobocznego $= a$. Obliczyć jego wysokość i promień koła opisanego.

29. Dwa boki trójkąta są: 15 cm. i 8 cm., a kąt między niemi zawarty $= 60^0$. Obliczyć bok trzeci.

30. Dwa boki trójkąta są: 2,4 cm. i 2,1 cm., a kąt między niemi $= 120^0$. Obliczyć bok trzeci.

31. W trapezie dane są: dolna (większa) podstawa $= a$, górna (mniejsza) $= d$, boki: b i c. Obliczyć: wysokości i obie przekątne.

32. Przekątne rombu są: d, d'. Obliczyć bok.

33. Obwód prostokąta $= 2p$, a przekątna $= d$. Obliczyć boki.

34. W kole o promieniu $= r$ poprowadzono cięciwę długości a. Znaleźć jej odległość od środka koła.

35. Z punktu, odległego o a od środka koła, poprowadzono styczną. Obliczyć jej długość, jeżeli promień koła $= r$.

36. W kole o promieniu $= r$ cięciwa łączy końce dwóch promieni, tworzących z sobą kąt $= 60^0$. Obliczyć długość tej cięciwy.

37. Końce średnicy danego koła połączono cięciwami z pewnym punktem okręgu. Jedna z tych cięciw jest nachylona do średnicy pod kątem 30^0. Obliczyć długość każdej cięciwy, jeżeli promień koła $= r$.

38. W kole o promieniu $= r$ poprowadzono cięciwę i przez jeden z jej końców poprowadzono średnicę, z drugiego zaś końca prostopadłą do tej średnicy, która dzieli ją na dwa odcinki. Odcinek przyległy do cięciwy $= b$. Obliczyć długość cięciwy.

39. Z punktu położonego zewnątrz koła poprowadzić sieczną w taki sposób, żeby ją okrąg dzielił na połowy.

40. Zbudować trójkąt równoramienny, mając jego obwód $= 2p$ i wysokość $= h$.

41. Zbudować trójkąt prostokątny, mając przeciwprostokątną $= c$ oraz sumę dwóch pozostałych boków $= s$.

42. Zbudować trójkąt prostokątny, mając przeciwprostokątną $= c$ oraz różnicę dwóch pozostałych boków $= d$.

43. Przez koniec średnicy koła równej $2r$ poprowadzono styczną. Znaleźć na niej taki punkt, aby suma stycznej i odcinka zewnętrznego siecznej, wyprowadzonej z tego samego punktu przez środek koła, była $= a$.

44. W trójkącie ABC o bokach odpowiednio równych: a, b, c, poprowadzić $DE \parallel BC$ w taki sposób, aby $DE : BC = BD : AD$.

45. W kole o promieniu $= r$ dana jest cięciwa $= a$. Przedłużyć ją o tyle, żeby styczna, wyprowadzona z końcowego punktu przedłużenia, była równa b.

46. Jeżeli w pięciokącie foremnym poprowadzimy dwie przecinające się przekątne, to na każdej z nich otrzymamy odcinek równy bokowi danego pięciokąta.

47. Dowieść, że w pięciokącie foremnym dwie przecinające się przekątne dzielą się nawzajem w stosunku średnim i skrajnym.

48—50. Mając promień koła $= r$, obliczyć bok foremnego wpisanego:

48. ośmiokąta,

49. dwunastokąta,

50. pięciokąta.

51—53. Mając promień koła $= r$, obliczyć bok foremnego opisanego:

51. trójkąta,

52. sześciokąta,

53. ośmiokąta.

54—56. Na danym odcinku $= a$ zbudować foremny:

54. sześciokąt,

55. ośmiokąt.

56. pięciokąt.

ROZDZIAŁ XI.

Wiadomości wstępne o rozwiązywaniu trójkątów.

§ 61. O funkcjach trygonometrycznych kąta ostrego.

334. W geometrji praktycznej i wogóle w matematyce stosowanej jednem z podstawowych zadań jest tak zw. r o z w i ą z y w a n i e t r ó j k ą t ó w, które polega na tem, żeby mając dane elementy, wyznaczające trójkąt, odnaleźć pozostałe.

Wiemy, że dla wyznaczenia trójkąta potrzeba i wystarcza trzech elementów: trzy boki, dwa boki i kąt między niemi zawarty, dwa kąty i bok między niemi. Jeżeli więc te elementy są dane, np. trzy boki, to trójkąt jest wyznaczony i możemy go zbudować, ale nie potrafimy odpowiedzieć na takie pytanie: jak wielki jest kąt trójkąta?

Praktycznie możemy dać odpowiedź, mierząc ten kąt przenośnikiem, ale taki wynik zadowolić nas nie może ze względu na niedostateczną dokładność przyrządu i niewiadomy nawet stopień przybliżenia, przez nas otrzymany.

Ale nietylko w takich zadaniach nie potrafimy dotąd znaleźć ścisłego rozwiązania, opartego na rachunku, bo jak sobie poradzić z zadaniem, gdzie trzeba znaleźć długość trzeciego boku trójkąta, wyznaczonego przez dwa boki i kąt między niemi?

Wiemy tyle dotychczas, że między bokami a kątami trójkąta istnieje zależność, bo naprzeciw równych boków leżą kąty równe, naprzeciw większego boku leży kąt większy; wiemy dalej, że kształt trójkąta jest w zupełności wyznaczony albo przez dwa kąty, albo przez jeden kąt i stosunek dwóch boków.

Do poznania tej zależności teraz właśnie przystąpimy, ograniczając się do trójkątów prostokątnych, dlatego że każdy trójkąt można podzielić wysokością na dwa trójkąty prostokątne.

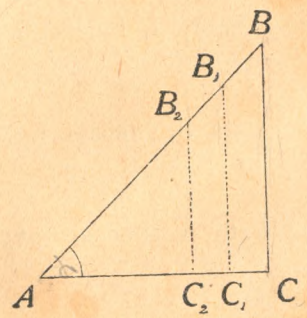
Niech będzie dany k ą t o s t r y A (rys. 298), z dowolnego punktu B jego ramienia poprowadźmy $BC \perp AC$, wtedy otrzymamy trójkąt prostokątny ABC, w którym bok BC jest przyprostokątną p r z e c i w l e g ł ą kątowi A, AC — przyprostokątną do niego p r z y l e g ł ą.

Możemy utworzyć następujące stosunki:

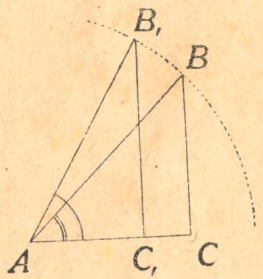
$$1)\ \frac{BC}{AB};\qquad 2)\ \frac{AC}{AB};\qquad 3)\ \frac{BC}{AC};$$

oraz ich odwrotności:

$$4)\ \frac{AB}{BC};\qquad 5)\ \frac{AB}{AC};\qquad 6)\ \frac{AC}{BC}.$$



Rys. 298.



Rys. 299.

Ogółem 6 stosunków. Przekonamy się przedewszystkiem, że wartości tych stosunków nie zależą od położenia punktu B na ramieniu AB. Istotnie, jeżeli poprowadzimy B_1C_1 i $B_2C_2 \perp AC$, to z podobieństwa trójkątów ABC, AB_1C_1 i AB_2C_2 będziemy mieli:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2};$$

to samo można powiedzieć o każdym z pozostałych stosunków. A zatem dla tego samego kąta A każdy z napisanych sześciu stosunków jest stały.

Jeżeli zaś kąt A ulegnie zmianie, np. zamiast niego weźmiemy kąt B_1AC_1 (rys. 299), gdzie przeciwprostokątna $AB_1 = AB$, to omawiane stosunki boków zmienią się. Możemy zatem powiedzieć, że dla danego kąta każdy z sześciu wymienionych stosunków jest wyznaczony.

Nawzajem, jeśli mamy daną wartość któregokolwiek z tych stosunków, np. $\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$, to zawsze możemy wykreślić kąt ostry A, budując trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna $BC=3$ dowolnym jednostkom długości a przeciwprostokątna $AB=5$ takim jednostkom. A zatem, jeżeli stosunek $\frac{BC}{AB}$ (lub którykolwiek inny) jest dany, to kąt ostry A jest wyznaczony.

Na tej zasadzie możemy powiedzieć, że każdy z sześciu stosunków, jakie zachodzą między bokami trójkąta prostokątnego, jest zależny tylko od kąta ostrego A, czyli jest funkcją tego kąta. Te funkcje noszą nazwę trygonometrycznych albo gonjometrycznych i każda z nich, jako wyrażająca stosunek dwóch boków, jest liczbą czystą (bez miana).

Każda z tych funkcyj ma swoją nazwę, a mianowicie:

1) stosunek $\frac{BC}{AB}$ nazywa się *wstawą* kąta A, inaczej *sinus A* i oznacza się w skróceniu *sin A*;

2) stosunek $\frac{AC}{AB}$ nazywa się *dostawą* kąta A, inaczej *cosinus A* i oznacza się w skróceniu *cos A*;

3) stosunek $\frac{BC}{AC}$ nazywa się *styczną* kąta A, inaczej *tangens A* i oznacza się w skróceniu *tng A*;

4) $\frac{AB}{BC}=$ dosieczna kąta A czyli *cosecans A*, w skróceniu *cosec A*;

5) $\frac{AB}{AC}=$ sieczna kąta A czyli *secans A*, w skróceniu *sec A*;

6) $\frac{AC}{AB}=$ dotyczna kąta A czyli *cotangens A*, krócej *cotg A*.

Słowami, w trójkącie prostokątnym:

1) wstawą kąta ostrego (*sinus*) nazywa się stosunek przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do przeciwprostokątnej;

2) dostawą (*cosinus*) kąta ostrego nazywa się stosunek przyprostokątnej przyległej do tego kąta do przeciwprostokątnej;

3) styczną (*tangens*) kąta ostrego nazywa się stosunek przyprostokątnej przeciwległej do przyprostokątnej przyległej;

4) odwrotność wstawy nazywa się dosieczną (*cosecans*);

5) odwrotność dostawy nazywa się sieczną (*secans*);

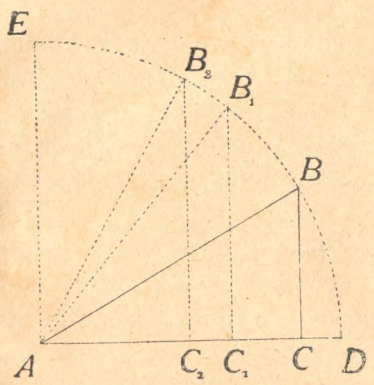
6) odwrotność stycznej nazywa się dotyczną (*cotangens*).

Z nich sieczna i dosieczna rzadko mają zastosowanie w rachunkach.

Uwaga. Początki trygonometrji sięgają czasów *Hipparcha* z Rodosu (162—126 przed Chr.), astronoma greckiego, ale dopiero *Klaudjusz Ptolemeusz* (II w. po Chr.) dał podstawy tej nauki w swem znakomitem dziele, zwanem przez Arabów *Almagestem*, którego pewne rozdziały poświęcił trygonometrji.—Słynny astronom polski *Mikołaj Kopernik* (1473—1543) w nieśmiertelnem dziele „De revolutionibus orbium coelestium" zajmuje się rozważaniami trygonometrycznemi.

§ 62. Własności zasadnicze funkcyj trygonometrycznych kąta ostrego.

335. Weźmy znowu jakikolwiek kąt ostry A (rys. 300) i z dowolnego punktu jednego ramienia poprowadźmy $BC \perp AC$, wtedy, jak już mówiliśmy:



Rys. 300.

$$\frac{BC}{AB}=sin\ A,$$

$$\frac{AC}{AB}=cos\ A,$$

$$\frac{BC}{AC}=tng\ A.$$

Te trzy zasadnicze funkcje kąta A bliżej poznamy z następujących ich własności:

1) Ponieważ wstawa i dostawa kąta jest stosunkiem przyprostokątnej do przeciwprostokątnej, więc wstawa i dostawa kąta jest zawsze liczbą mniejszą od jedności, styczna zaś może przybierać różne wartości, większe lub mniejsze od 1.

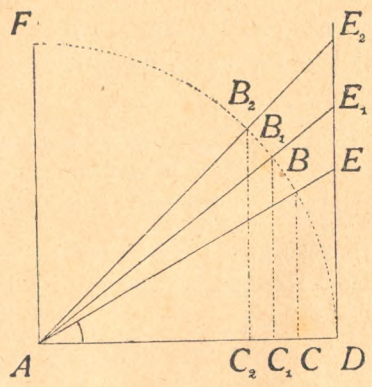
2) Zobaczmy, jaka zmiana zajdzie w wartości każdej z tych trzech funkcyj, podczas kiedy kąt będzie wzrastał. Opiszmy z punktu A łuk promieniem AB i poprowadźmy prostopadłe: B_1C_1, B_2C_2 i t. d., wtedy będzie:

$$B_2C_2 > B_1C_1 > BC$$
$$AC_2 < AC_1 < AC,$$

a ponieważ $AB_2 = AB_1 = AB$, więc

$$\frac{B_2C_2}{AB_2} > \frac{B_1C_1}{AB_1} > \frac{BC}{AB},$$

$$\frac{AC_2}{AB_2} < \frac{AC_1}{AB_1} < \frac{AC}{AB},$$



Rys. 301.

a zatem:

jeżeli kąt ostry wzrasta, jego wstawa wzrasta, a dostawa maleje.

Jeżeli kąt A będzie wzrastał, to jego styczna będzie miała wartości:

$$\frac{BC}{AC}, \quad \frac{B_1C_1}{AC_1}, \quad \frac{B_2C_2}{AC_2} \text{ i t. d.}$$

albo inaczej (rys. 301):

$$\frac{DE}{AD}, \quad \frac{DE_1}{AD}, \quad \frac{DE_2}{AD} \text{ i t. d.}$$

Stąd widzimy: jeżeli kąt ostry wzrasta, jego styczna również wzrasta.

3) Uważając, że kąt A (rys. 301) powstał z obrotu ruchomego ramienia AB dokoła wierzchołka A, które wyszedłszy ze swego początkowego położenia AB_2, zajmuje kolejne położenia: AB_2, AB_1 i t. d. aż wreszcie dąży do położenia AD, widzimy, że kąt A, malejąc, dąży do 0. Zachodzi pytanie: co się dzieje z funkcjami trygonometrycznemi kąta?

Odcinek BC będzie malał, dążąc do 0; odcinek AC będzie wzrastał, dążąc do długości AD, a że promień AB pozostaje stały, spostrzegamy, że wtedy wstawa kąta maleje do 0, zaś dostawa rośnie do 1. Styczna kąta będzie malała do zera.

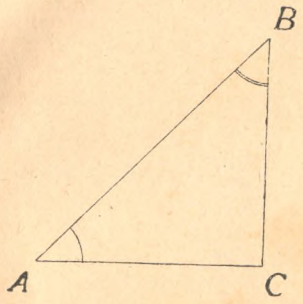
Zakładając teraz, iż kąt dany wzrasta, dążąc do kąta prostego, kiedy ramię AB zajmie położenie $AF \perp AD$, widzimy znowu, że kiedy kąt ostry rośnie, dążąc do prostego, jego wstawa wzrasta, dążąc do 1, dostawa maleje do 0, zaś styczna wzrasta nieograniczenie.

Uwaga. Jakie są wartości graniczne funkcyj trygonometrycznych, kiedy kąt staje się równy 0 lub 90^0, tymczasem przesądzać nie możemy, dlatego że nasze określenia tych funkcyj dotyczyły kąta ostrego, takim zaś nie jest kąt 0^0 lub 90^0. Rozumowanie oparliśmy na spostrzeżeniu i przewidywaniu; później w systematycznej nauce trygonometrji przekonamy się, że te przewidywania były trafne.

4) Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC (rys. 302); wiadomo, że

$$\sphericalangle B = 90^0 - A.$$

Napiszmy tryg. funkcje każdego z tych dwu kątów, wtedy z łatwością zobaczymy, że



Rys. 302.

$$sin\ A = \frac{BC}{AB} = cos\ B,$$

$$cos\ A = \frac{AC}{AB} = sin\ B,$$

$$tng\ A = \frac{BC}{AC} = cotg\ B;$$

czyli

$$sin\ A = cos\ (90^0 - A);$$
$$cosec\ A = sec\ (90^0 - A);$$
$$cos\ A = sin\ (90^0 - A);$$
$$sec\ A = cosec\ (90^0 - A);$$
$$tng\ A = cotg\ (90^0 - A);$$
$$cotg\ A = tng\ (90^0 - A);$$

słowami: wstawa kąta danego jest równa dostawie dopełnienia do 90^0, dostawa kąta danego równa się wstawie dopełnienia do 90^0 i td., wogóle:

funkcja kąta danego jest równa kofunkcji dopełnienia. Tem się właśnie tłumaczą nazwy „kofunkcyj”:

cosinus = *complimenti sinus*, w skróceniu *cosinus* (po polsku: *dostawa* = *wstawa dopełnienia* = *dostawa*) itd. A więc możemy powiedzieć, że

$$sin\ 64^0 = cos\ 26^0; \quad tng\ 52^0 = cotg\ 38^0 \text{ itd.}$$

Wogóle, rozumiejąc przez α pewien kąt ostry, będziemy mieli:

$$sin\ (45^0 + \alpha) = cos\ (45^0 - \alpha),$$
$$cos\ (45^0 + \alpha) = sin\ (45^0 - \alpha),$$

albo ogólnie, nazywając przez f którąkolwiek z funkcyj trygonometrycznych kąta α:

$$f\ (45^0 + \alpha) = cof\ (45^0 - \alpha).$$

A zatem wystarcza poznać wartości funkcyj trygon. kątów mniejszych od 45^0, żeby już mieć gotowe wartości funkcyj kątów większych od 45^0.

336. Na zasadzie dotychczasowych wiadomości możemy obliczyć wartości tryg. funkcyj niektórych często spotykanych kątów.

a) Niech będzie dany kąt $A = 45^0$ (rys. 303). Poprowadźmy $BC \perp AC$, wtedy będzie: $B = 45^0$, $BC = AC$,

$$AB = BC\sqrt{2} = AC\sqrt{2},$$

a zatem:

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = {}^1/_2\sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tng} 45^0 = 1.$$

b) Niech teraz będzie kąt $A = 30^0$, wtedy jak wiadomo:

$$BC = \frac{AB}{2},$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{AB}{2}\sqrt{3},$$

a więc

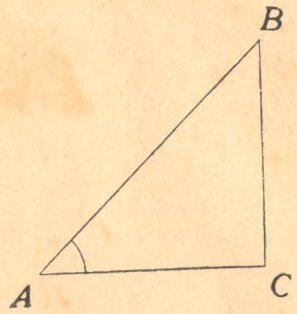
$$\sin 30^0 = {}^1/_2; \quad \cos 30^0 = {}^1/_2\sqrt{3}; \quad \operatorname{tng} 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Stąd już wynikać będzie:

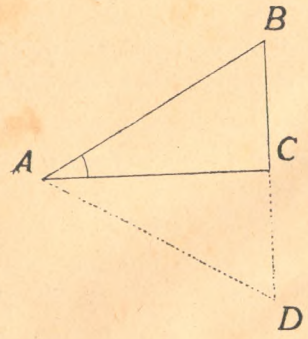
$$\sin 60^0 = \cos 30^0 = {}^1/_2\sqrt{3},$$

$$\cos 60^0 = \sin 30^0 = {}^1/_2,$$

$$\operatorname{tng} 60^0 = \operatorname{cotg} 30^0 = \frac{1}{\operatorname{tng} 30^0} = \sqrt{3}.$$



Rys. 303.



Rys. 304.

c) Jeżeli kąt $A = 18^0$ (rys. 304), to biorąc $CD = BC$, otrzymujemy $\sphericalangle BAD = 36^0$, a więc BD jest bokiem 10-kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu AB, będzie więc

$$BC = \frac{AB}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

a zatem:

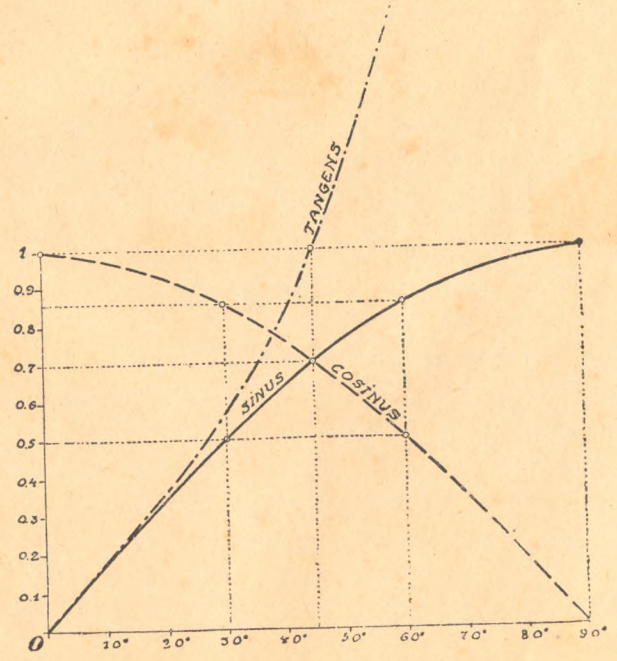
$$\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

337. Przebieg zmienności wstawy, dostawy i stycznej kąta ostrego możemy przedstawić graficznie w następujący sposób:

Zbudujmy ćwiartkę koła o promieniu AD (rys. 301), który obierzmy za 1, następnie dla każdego położenia tego promienia: AB, AB_1, AB_2.... poprowadźmy prostopadłe BC, BC_1, BC_2.... oraz odmierzmy DE, DE_1, DE_2.... Wtedy odcinki BC, BC_1, BC_2.... będą wyobrażały wartości wstawy zmiennego kąta BAD, odcinki AC, AC_1, AC_2—dostawy tego kąta, zaś DE, DE_1, DE_2....—stycznej.

Następnie na papierze milimetrowym poprowadźmy dwie prostopadłe do siebie osie, umówiwszy się odmierzać na jednej z nich odcinki równe, odpowiadające kątowi 10^0, na drugiej zaś odmierzmy odcinek $= AD = 1$ (rys. 305).

Z takiego wykresu, dokładnie i w dość znacznej skali wykonanego, można odczytywać przybliżone wartości wstawy, dostawy i stycznej danego kąta ostrego.



Rys. 305.

Oczywiście taka dokładność nie może wystarczać, zanim więc poznamy sposoby obliczania wartości funkcyj trygon. z dowolnem przybliżeniem (o czem mówi się w systematycznym wykładzie trygonometrji), podajemy tu tablicę wartości tych funkcyj dla kątów ostrych w odstępach 1-stopniowych (str. 261). Wartości funkcyj podane są z dokładnością do 0,0001, wystarczającą do naszych rachunków.

Jeżeli chodzić będzie o znalezienie wartości funkcyj kąta niepodanego w tablicy, posługujemy się regułą interpolacji, zakładając, że przyrost wartości funkcji jest proporcjonalny do przyrostu kąta (co ściśle nie jest, ale w naszych obliczeniach wystarcza). Mianowicie:

Mamy znaleźć wartość *sin* 28° 24′. Z tablicy odczytujemy:

$$\sin 28^0 = 0.4695$$
$$\sin 29^0 = 0.4848,$$

widzimy, że przyrostowi kąta o 1° odpowiada przyrost jego wstawy o 0.0153, a zatem przyrostowi kąta o 24′, według naszego założenia, odpowiadać będzie przyrost jego wstawy: $\frac{0.0153 \cdot 24}{60} = 0.0061$,

a zatem:

$$\sin 28^0\ 24' = 0.4756.$$

Pamiętać trzeba, że ze wzrastaniem kąta jego dostawa maleje i odpowiedni przyrost dostawy będzie ujemny, czyli należy go odjąć. To samo będzie dla dotycznej.

Tablica podaje wartości wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych i ułożona jest w ten sposób, że z lewej strony odczytujemy kąty od 1° do 45°, ich funkcje—w rubrykach zatytułowanych u góry. Kąty od 45° do 90° odczytujemy z prawej strony, ich funkcje w rubrykach zatytułowanych u dołu.

Nawzajem, mając wartość którejkolwiek z funkcyj trygon., możemy odnaleźć kąt. Niech np. będzie dane $\operatorname{cotg} x = 1.5189$.

Z tablicy mamy $\operatorname{cotg} 34^0 = 1.4826$
$\operatorname{cotg} 33^0 = 1.5399,$

więc przyrostowi *cotg* równemu 0.0573 odpowiada zmniejszenie kąta o 1° = 60′, a że daną wartość *cotg* powinniśmy powiększyć o

$$1.5189 - 1.4826 = 0.0363,$$

więc kąt 34° należy zmniejszyć o

$$\frac{0.0363 \cdot 60}{0.0573} = 38',$$

a zatem

$$x = 33^0 22'.$$

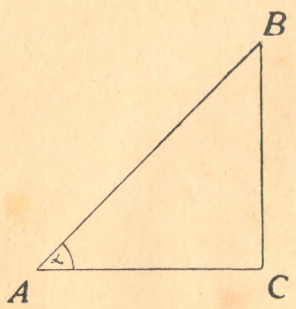
TABLICA WARTOŚCI FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

o	*Sinus*	*Tangens*	*Cotangens*	*Cosinus*	*o*
1	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	89
2	0.0349	0.0349	28.6362	0.9994	88
3	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	87
4	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	86
5	0.0872	0.0875	11.4300	0 9962	85
6	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	84
7	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	83
8	0.1392	0.1405	7.1154	0 9903	82
9	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	81
10	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	80
11	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	79
12	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	78
13	0.2250	0.2309	4.3315	0 9744	77
14	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	76
15	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	75
16	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	74
17	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	73
18	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	72
19	0.3256	0.3443	2.9042	0 9455	71
20	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	70
21	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	69
22	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	68
23	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	67
24	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	66
25	0.4226	0 4663	2.1445	0.9063	65
26	0.4384	0.4877	2.0503	0 8988	64
27	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	63
28	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	62
29	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	61
30	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	60
31	0 5150	0.6009	1.6643	0.8572	59
32	0 5299	0.6249	1.6003	0.8480	58
33	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	57
34	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	56
35	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	55
36	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	54
37	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	53
38	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	52
39	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	51
40	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	50
41	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	49
42	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	48
43	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	47
44	0.6947	0 9657	1.0355	0.7193	46
45	0.7071	1.0000	1 0000	0.7071	45
o	*cosinus*	*cotangens*	*tangens*	*sinus*	*o*

§ 63. Związki między funkcjami trygonometrycznemi tego samego kąta.

338. Weźmy dowolny kąt ostry α (rys. 306), poprowadźmy $BC \perp AC$, wtedy możemy napisać znaną zależność:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$



Rys. 306.

Jeżeli obie strony tej równości podzielimy przez AB^2, otrzymamy

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$$

czyli

$$(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1,$$

co w skróceniu można napisać:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad . \quad . \quad (1)$$

Dalej:

$$tng\ \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = sin\,\alpha : cos\,\alpha,$$

czyli

$$tng\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Następnie na zasadzie określenia funkcyj tryg. mamy:

$$cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha} = \frac{1}{tng\ \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Mając pięć powyższych zależności, możemy obliczyć wszystkie funkcje kąta, jeżeli jedna z nich jest wiadoma.

Np. jeżeli $sin\ \alpha = {}^3/_5$, to otrzymamy:

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = {}^4/_5,$$

$$tng\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = {}^3/_4,$$

$$cotg\ \alpha = {}^4/_3;\ sec\ \alpha = {}^5/_4;\ cosec\ \alpha = {}^5/_3.$$

Otrzymane pięć zależności wystarczają w powyższem zadaniu, możemy jednak znaleźć jeszcze następujące dwie, które niekiedy dogodnie jest stosować:

Z zależności $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$,

dzieląc przez $cos^2\alpha$, mamy

$$1 + tng^2\alpha = sec^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

a dzieląc przez $sin^2\alpha$:

$$1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

§ 64. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

339. Wiemy, że trójkąt prostokątny jest w zupełności wyznaczony przez dwa elementy:

1°. dwie przyprostokątne,
2°. przeciwprostokątną i jedną z przyprostokątnych,
3°. przeciwprostokątną i kąt ostry,
4°. przyprostokątną i kąt ostry.

Mamy więc cztery podstawowe zadania, dotyczące rozwiązywania trójkątów prostokątnych. Kąty ostre oznaczać będziemy A i B, kąt prosty C, przyprostokątne: $BC = a$, $AC = b$, przeciwprostokątna $= c$.

Zadanie 1. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając obie przyprostokątne.

Mamy dane: a i b, obliczyć: c, A i B.

Przeciwprostokątną c obliczymy ze znanego wzoru:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

kąt ostry A znajdziemy z zależności:

$$tng\ A = \frac{a}{b},$$

mając zaś $tng\ A$, znajdziemy z tablicy kąt A. Wreszcie

$$B = 90^0 - A.$$

Zadanie 2. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając przeciwprostokątną i jedną z przyprostokątnych.

Dane są: a i c, obliczyć b, A, B.

Z określenia funkcyj trygon. mamy:

$$sin\ A = \frac{a}{c},\ \text{stąd znajdziemy kąt } A;$$

albo

$$cos\ B = \frac{a}{c},\ \text{stąd znajdziemy kąt } B;\ \text{oczywiście } B = 90^0 - A.$$

Przyprostokątną b obliczymy z zależności:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Zadanie 3. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając przeciwprostokątną i kąt ostry.

Dane są c i A, obliczyć a, b i B.

Kąt B mamy odrazu:

$$B = 90^0 - A.$$

Boki a i b znajdziemy z zależności:

$$\frac{a}{c} = sin\ A\ (= cos\ B)$$

i

$$\frac{b}{c} = cos\ A\ (= sin\ B),$$

mianowicie:

$$a = c\,.\,sin\ A = c\,.\,cos\ B,$$
$$b = c\,.\,sin\ B = c\,.\,cos\ A,$$

czyli: w trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest równa przeciwprostokątnej, pomnożonej przez wstawę kąta przeciwległego tej przyprostokątnej, albo przez dostawę kąta do niej przyległego.

Zadanie 4. Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając jedną z przyprostokątnych i kąt ostry.

Mamy dane: b i A, znaleźć: a, c i B.

Kąt B mamy odrazu: $B = 90^0 - A$.

Przeciwprostokątną c znajdziemy z zależności:

$$\frac{a}{c} = sin\ A,$$

więc

$$c = \frac{a}{sin\ A}.$$

Przyprostokątną a obliczymy z zależności:

$$\frac{a}{b} = tng\ A = cotg\ B,$$

stąd

$$a = b\,.\,tng\ A = b\,.\,cotg\ B,$$

t. j. w trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest równa drugiej przyprostokątnej, pomnożonej przez styczną kąta przeciwległego pierwszej z nich, lub przez dotyczną kąta do niej przyległego.

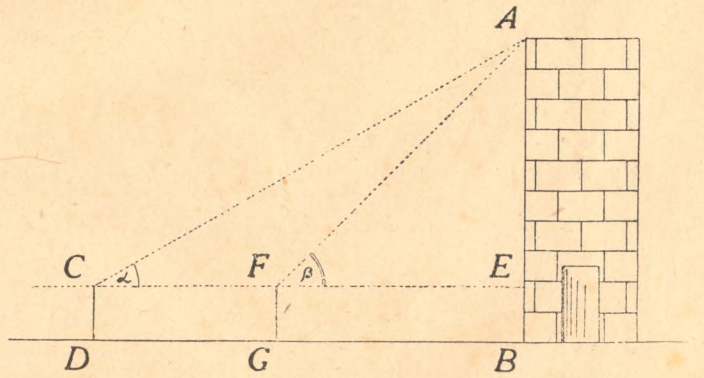
340. Ponieważ trójkąt równoramienny składa się z dwóch równych sobie trójkątów prostokątnych, więc rozwiązywanie trójkątów równoramiennych nie wymaga wyprowadzania odrębnych wzorów ponad te, któreśmy już poznali.

Wielokąt foremny zawsze da się sprowadzić do trójkątów równoramiennych przez połączenie środka wielokąta z jego wierzchołkami.

W geometrji praktycznej ważną rolę odgrywają zadania, dotyczące obliczania wysokości pewnych przedmiotów (np. wieży, góry i t. p.), odległości między dwoma przedmiotami, której bezpośrednio wymierzyć niepodobna, wreszcie obliczania kąta między dwiema prostemi. Tego rodzaju zadania rozwiązuje się przez zastosowanie funkcyj trygonometrycznych.

W pomiarach praktycznych zwykle znajduje się długość jednego odcinka i mierzy się ją z możliwie wielką dokładnością przy pomocy łańcucha mierniczego 10-metrowego. Dawniej w Polsce był używany łańcuch mierniczy, który się dzielił na 10 prętów po $7^1/_2$ łokcia koronnego. Do mierzenia kątów służy przyrząd, zwany *teodolitem*, którego koło pionowe z przytwierdzoną do niego lunetą pozwala odczytywać *kąt wzniesienia* czyli kąt, jaki tworzy oś lunety skierowanej na pewien punkt, z linją poziomą (albo *kąt depresji*, jeżeli dany punkt leży poniżej poziomu).

Przykład. Zmierzyć wysokość wieży.



Rys. 307.

Jeżeli AB (rys. 307) jest wysokością wieży i jej podstawa jest dla nas dostępna, to możemy na powierzchni ziemi wymierzyć długość $DB = a$. Ustawiamy w punkcie D teodolit i kierując jego lunetę na punkt A, odczytujemy kąt wzniesienia $ACE = \alpha$; $DC = m$ jest wysokością przyrządu.

Z $\triangle$ CEA mamy

$$AE = CE \,.\, tng\ \alpha,$$

a więc poszukiwana wysokość wieży

$$AB = m + a \,.\, tng\ \alpha.$$

Jeżeli podstawa wieży jest dla nas niedostępna, ustawiamy naprzód teodolit w punkcie D i znajdujemy kąt wzniesienia α, następnie przenosimy przyrząd do punktu G i znowu znajdujemy kąt wzniesienia β, zmierzywszy dokładnie odległość $DG = b$.

Wtedy mamy

$$CE = AE \,.\, cotg\ \alpha$$
$$FE = AE \,.\, cotg\ \beta,$$

stąd

$$b = AE \,.\, (cotg\ \alpha - cotg\ \beta),$$

a więc

$$AB = AE + m = \frac{b}{cotg\,\alpha - cotg\,\beta} + m.$$

§ 65. Ćwiczenia.

1—4. Wykreślić kąt ostry α, mając:

1. $sin\ \alpha = 2/3;\ 4/5;\ 5/8.$
2. $cos\ \alpha = 3/5;\ 1/3;\ 0{,}7.$
3. $tng\ \alpha = 2/5;\ 0{,}4;\ 2.$
4. $cotg\ \alpha = 3;\ 0{,}3;\ 0{,}8.$

5—8. Posiłkując się tablicą str. 261, odnaleźć wartości: *sin*, *cos*, *tng* i *cotg* dla każdego z następujących kątów: 5) $18^0 36'$; 6) $32^0 20'$; 7) $56^0 12'$; 8) $62^0 25'$.

9—16. Posiłkując się tablicą str. 261, odnaleźć kąt α, mając wartość jego funkcji trygonometrycznej:

9. $sin\ \alpha = 0.3880;$ 10. $cos\ \alpha = 0.8872;$
11. $tng\ \alpha = 0.2910;$ 12. $cotg\ \alpha = 1.9532;$
13. $sin\ \alpha = 0.9415;$ 14. $cos\ \alpha = 0.4120;$
15. $tng\ \alpha = 2.4251;$ 16. $cotg\ \alpha = 0.4120.$

17—24. Mając wartość jednej z funkcyj trygonometrycznych kąta ostrego α, odnaleźć wartości pozostałych funkcyj:

17. $sin\ \alpha = 1/5;$ 18. $cos\ \alpha = 2/3;$
19. $tng\ \alpha = 1/5;$ 20. $cotg\ \alpha = 4/3;$
21. $sin\ \alpha = m;$ 22. $cos\ \alpha = n;$
23. $tng\ \alpha = p;$ 24. $cotg\ \alpha = q.$

25—28. Posiłkując się tablicą str. 261, rozwiązać trójkąt prostokątny, jeżeli są dane:

25. obie przyprostokątne a i b;
26. przeciwprostokątna c i przyprostokątna b;
27. przeciwprostokątna c i kąt ostry A;
28. przyprostokątna a i kąt ostry A.

Wartości liczbowe elementów trójkąta są:

a	b	c	A	B
3	4	5	$36^0 52'$	$53^0 8'$
5	12	13	$22^0 37'$	$67^0 23'$
15	8	17	$61^0 56'$	$28^0 4'$
7	24	25	$16^0 16'$	$73^0 44'$
21	20	29	$46^0 24'$	$43^0 36'$
9	40	41	$12^0 41'$	$77^0 19'$
35	12	37	$71^0 5'$	$18^0 55'$

29—32. Rozwiązać trójkąt równoramienny, mając:

29. podstawę = 28 cm. i kąt przeciwległy = $63^0 24'$;
30. podstawę = 59 cm. i ramię = 35 cm;
31. wysokość = 16 cm. i kąt przy podstawie = $36^0 12'$;
32. wysokość = 6,6 cm. i ramię = 10 cm.

33—37. Promień koła = 10 cm; obliczyć długość cięciwy, odpowiadającej kątowi środkowemu α:

33. $\alpha = 28^0$; 34. $\alpha = 32^0 40'$; 35. $\alpha = 60^0$;
36. $\alpha = 64^0 30'$; 37. $\alpha = 72^0 15'$.

38. W kole o promieniu $r = 7{,}6$ cm. poprowadzono cięciwę $a = 8{,}4$ cm. Obliczyć kąt środkowy, odpowiadający tej cięciwie.

39. Jak wielki jest kąt środkowy w kole, odpowiadający cięciwie, której długość = 3/4 promienia?

40. W pewnem kole kąt wpisany jest = 28^0 i opiera się na cięciwie długości $a = 12$ cm. Obliczyć promień tego koła.

41. Z pewnego punktu okręgu, którego promień $r = 10$ cm., poprowadzono dwie cięciwy długości $a = 6$ cm. i $b = 9$ cm. Jaki kąt tworzą z sobą te cięciwy?

42—44. Obliczyć bok foremnego n-kąta, wpisanego w koło o promieniu $r = 12$ cm:

42. $n = 15$; 43. $n = 18$; 44. $n = 9$.

45—48. Obliczyć kąty trójkąta ukośnokątnego, mając jego trzy boki:

45.—56; 25; 39;
46.—63, 25; 52;
47.—21; 20; 13;
48.—11; 20; 13.

49. Z odległości $a = 120$ m od wieży widać jej wierzchołek pod kątem wzniesienia $\alpha = 36^0 10'$. Obliczyć wysokość wieży. Wysokość teodolitu $l = 1{,}2$ m.

50. Dla znalezienia szerokości rzeki wymierzono wzdłuż jednego jej brzegu odległość $AB = a$; kierując poziomą lunetę, ustawioną w punkcie A prostopadle do AB, widzimy na przeciwległym brzegu punkt C, który z punktu B widać pod kątem α do AB. Obliczyć szerokość rzeki:

$a = 58$ m.; $\alpha = 24^0 15'$.

51. Pal, wbity pionowo w ziemię, rzuca cień długości 32 m. Wysokość pala nad ziemią wynosi 12 m., znaleźć kąt wzniesienia słońca (wysokość słońca).

52. Jaka jest wysokość słońca, jeżeli cień odrzucany przez pionowy pal, wynosi połowę jego wysokości?

53. Jakiej długości cień odrzucać będzie pionowy pal, jeżeli słońce znajduje się na wzniesieniu 42^0?

54. Pod jakim kątem obserwator będzie widział wieżę wysokości 64 m. z odległości 240 m., jeżeli patrzy na nią z wysokości 6 m.?

55. Jaką siłą można utrzymać na płaszczyźnie nachylonej pod kątem $\alpha = 24^0$ do poziomu ciało o ciężarze $p = 82$ kg.?

56. Siłą p kg. utrzymuje się na płaszczyźnie pochyłej pewne ciało, które ciśnie na tę płaszczyznę z siłą q kg. Jaki jest kąt nachylenia płaszczyzny do poziomu i jaki jest ciężar ciała?

57. Kula toczy się po płaszczyźnie, nachylonej pod kątem $\alpha = 6^0 20'$ do poziomu. Jaką drogę przebiegnie w $t = 4$ sekundy?

ROZDZIAŁ XII.

Obliczanie pól wielokątów.

§ 66. Pojęcie pola. Pola wielokątów.

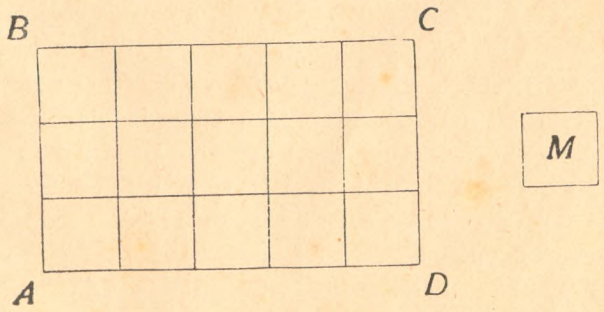
341. **Określenie.** Wiemy już, że wielokąty stanowią rodzaj wielkości geometrycznych, może więc być mowa o ich mierzeniu. W tym celu, posługując się metodą, którą stosowaliśmy do odcinków, powinniśmy obrać jednostkę miary i porównać z nią dany wielokąt. Liczba, którą otrzymamy z tego porównania, nosi nazwę *pola* wielokąta.

Za jednostkę miary wielokątów przyjmujemy kwadrat o boku równym jednostce linjowej: 1 metrowi, decymetrowi lub centymetrowi; taka jednostka nazywa się zwykle kwadratową, więc metr kwadratowy (m^2) jest kwadratem o boku = 1 metrowi linjowemu; $1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2$.

A zatem odnalezienie pola danego wielokąta jest równoznaczne z obliczeniem, ile razy $1\ m^2$ lub cm^2 mieści się w tym wielokącie.

342. Najprostszem zagadnieniem będzie obliczenie pola prostokąta.

Niech więc będzie dany prostokąt $ABCD$ (rys. 308), za jednostkę obierzmy kwadrat M. Dla rozwiązania naszego zadania



Rys. 308.

musimy obliczyć, ile razy kwadrat M pomieści się w prostokącie AC. Jeżeli bok kwadratu odmierzymy naprzód na podstawie danego prostokąta, potem na jego wysokości i przez punkty podziału poprowadzimy równoległe do boków prostokąta, to podzielimy go na szereg kwadratów, z których każdy będzie równy M i zadanie sprowadza się do znalezienia stosunku 2-ch odcinków, albo do znalezienia liczby wymiarowej każdego z nich, jeżeli bok kwadratu M wzięto za jednostkę. I tu, jak wiemy, zajść mogą trzy przypadki.

1) Stosunki boków AD i AB do boku kwadratu M są liczbami całkowitemi; niech np. bok tego kwadratu w podstawie AD pomieści się a razy, a w wysokości AB pomieści się b razy (a i b — liczby całkowite), wtedy cały prostokąt AC zawierać będzie w sobie $(a.b)$ kwadratów równych M i powiadamy, że

$$pole\ ABCD = a.b.$$

2) Bok kwadratu M nie mieści się całkowitą ilość razy w AD i AB, ale jego część p-ta zawiera się w AD—m razy, w AB—n razy (m i n — liczby całkowite), wtedy liczbą wymiarową podstawy prostokąta będzie ułamek $\frac{m}{p}$, a wysokości ułamek $\frac{n}{p}$. Mając boki kwadratu M podzielone na p części równych, możemy go prostemi równoległemi rozciąć na p^2 małych kwadracików, których prostokąt dany zawierać będzie $m.n$, a więc stosunek tego prostokąta do kwadratu M, czyli pole $ABCD = \frac{m.n}{p^2} = \frac{m}{p}.\frac{n}{p}$ razy wziętemu polu M.

3) Wreszcie stosunki podstawy i wysokości prostokąta do boku kwadratu M nie mogą być wyrażone ani liczbami całkowitemi, ani ułamkowemi, czyli są liczbami niewymiernemi. Pierwszy z tych stosunków będzie wyznaczony przez pewien przekrój, który nazwiemy symbolicznie (a), drugi — (b), wtedy pole prostokąta danego wyznaczymy przez przekrój $(a.b)$, w którym do niższej klasy liczb będą należały iloczyny niższych przybliżeń liczb a i b:

$$przekrój\ (a.b) = przekr.\ (a).przekr.\ (b).$$

Wogóle więc mamy następujące **twierdzenie:**

Pole prostokąta jest równe iloczynowi liczb wymiarowych jego podstawy i wysokości, krócej:

pole prostokąta równe jest iloczynowi jego podstawy i wysokości.

Jeżeli np. $AD = 8$ cm., $AB = 3$ cm., to pole $ABCD = (8.3) = 24$ cm^2.

Jeżeli $AD = 5\frac{1}{3}$ cm., $AB = 1\frac{1}{4}$ cm., to pole $= 6\frac{2}{3}$ cm^2.

Jeżeli wreszcie $AD = \sqrt{7}$ cm., $AB = \sqrt{3}$ cm., to pole $= \sqrt{21}$ cm^2.

Stąd wynika wprost, że pole kwadratu jest równe drugiej potędze liczby wymiarowej jego boku, krócej:

pole kwadratu jest równe kwadratowi jego boku.

Stąd właśnie pochodzi nazwa kwadratu liczby, jako jej drugiej potęgi.

343. Niech teraz będzie dany pewien równoległobok; dla obliczenia jego pola należałoby znowu dowiedzieć się, ile razy wzięta przez nas jednostka (1 cm^2) pomieści się w tym równoległoboku, czyli należałoby podzielić go na kwadraty równe 1 cm^2 (lepiej nawet 1 mm^2). Łatwo jednak przekonać się, że danej figury nie da się pokryć kwadratami (będą zbywały pewne „resztki", które po zsumowaniu dałyby kwadraty *); więc obieramy inną drogę postępowania: dany równoległobok przekształcamy na równoważny mu prostokąt (ust. 200) i jego pole przyjmujemy za pole danego równoległoboku.

Tak samo postąpimy, obliczając pole trapezu, trójkąta i t. d.

Wogóle przyjmiemy, że

1) wielokąty równoważne mają pola równe;

2) wielokąt, który jest sumą dwóch lub więcej wielokątów, ma pole równe sumie pól tych wielokątów.

Na tej zasadzie, biorąc za punkt wyjścia twierdzenie o polu prostokąta, możemy wypowiedzieć następujące **wnioski:**

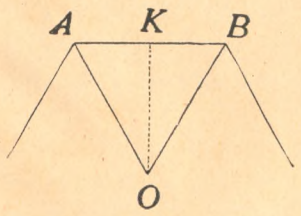
1. Pole równoległoboku jest równe iloczynowi jego podstawy i wysokości (patrz 200).

2. Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu jego podstawy i wysokości (p. 203).

3. Pole trapezu jest równe iloczynowi jego linji środkowej i wysokości (p. 204), inaczej:

pole trapezu jest równe iloczynowi jego wysokości i średniej arytmetycznej obu podstaw.

4. Jeżeli wierzchołki wielokąta foremnego połączymy ze środkiem koła (rys. 309), to podzielimy go na równe trójkąty.



Rys. 309.

Pole $\triangle AOB$ będzie równe

$$^1/_2\ AB.OK,$$

*) Praktycznie widzimy to, robiąc rysunek na przezroczystym papierze i przenosząc go następnie na siatkę, złożoną z kwadracików milimetrowych.

gdzie OK jest apotemą wielokąta, więc pole całego wielokąta o n bokach będzie:

$$S = {}^1/_2 . n . AB . OK,$$

ale $n . AB$ jest równe obwodowi wielokąta (P), $OK = r$ jego apotemą, więc

$$S = {}^1/_2 P . r,$$

czyli pole wielokąta foremnego jest równe połowie iloczynu jego obwodu i apotemy.

344. **Wnioski.** Poznawszy sposoby obliczania pól wielokątów, możemy wzór algebraiczny dwuwymiarowy czyli przedstawiający iloczyn 2-ch odcinków, interpretować geometrycznie, jako pole pewnego wielokąta. Jeżeli więc przez a, b, c i t. d. rozumieć będziemy długości odcinków, to iloczyn ab możemy uważać za pole prostokąta (albo równoległoboku) o podstawie $= a$ i wysokości $= b$; a^2 będzie polem kwadratu o boku równym a i t. d.

Jeżeli teraz przypomnimy sobie pewne twierdzenia, któreśmy poznali z teorji równoważności figur oraz proporcjonalności odcinków, to zestawiając je z ostatnio otrzymanemi wynikami, skonstatować musimy, że wyrażają one te same własności figur, inaczej tylko sformułowane.

Tak np., jeżeli a i b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś c jego przeciwprostokątną, to interpretując geometrycznie związek $a^2 = b^2 + c^2$ (ust. 304), otrzymamy znane już przedtem twierdzenie Pitagorasa (ust. 210).

Tak samo zależność między wysokością trójkąta prostokątnego a odcinkami przeciwprostokątnej (ust. 304) jest algebraiczną interpretacją tw. Euklidesa (ust. 207).

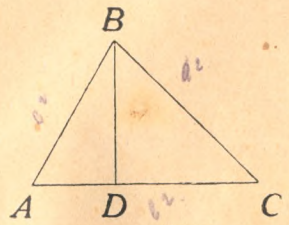
Dalej: twierdzenie o kwadracie boku w trójkącie, położonego naprzeciw kąta ostrego lub rozwartego (ust. 305), poznaliśmy przedtem, jako uogólnione twierdzenie Pitagorasa (ust. 216) i t. p.

Przytoczone twierdzenia możemy teraz sformułować, jak następuje:

pole kwadratu, wystawionego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, jest równe sumie pól kwadratów, wystawionych na jego przyprostokątnych;

pole kwadratu, wystawionego na wysokości trójkąta prostokątnego, jest równe polu prostokąta, zbudowanego na odcinkach jego przeciwprostokątnej itp.

345. **Zadanie.** Mając trzy boki trójkąta, obliczyć jego pole.



Rys. 310.

Niech $AB = c$ (rys. 310), $BC = a$, $AC = b$, wiadomo że pole trójkąta

$$S = \frac{AC . BD}{2} = \frac{b . BD}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

Wysokość BD znajdziemy, jeżeli będzie wiadome AD, które obliczymy z równania:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC . AD,$$

czyli $a^2 = c^2 + b^2 - 2\,b . AD,$

stąd $2\,b . AD = b^2 + c^2 - a^2,$

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b}.$$

Mając AD, z $\triangle ABD$ otrzymamy:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2} = \frac{4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2} =$$

$$= \frac{(2\,bc + b^2 + c^2 - a^2) . (2\,bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4\,b^2} =$$

$$= \frac{[(b + c)^2 - a^2] . [a^2 - (b - c)^2]}{4\,b^2} =$$

$$= \frac{(b + c + a)\ (b + c - a) . (a + b - c)\ (a - b + c)}{4\,b^2}.$$

A więc $$BD = \frac{\sqrt{(a + b + c)\ (a - b + c)\ (a + b - c)\ (b + c - a)}}{2\,b}.$$

Podstawiając tę wartość BD w równość (1), otrzymamy:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)\ (a - b + c)\ (a + b - c)\ (b + c - a)}.$$

Można uprościć ten wzór, oznaczając:

$$a + b + c = 2\,p,$$

wtedy

$$a - b + c = 2p - 2b = 2\ (p - b)$$
$$a + b - c = 2p - 2c = 2\ (p - c)$$
$$b + c - a = 2p - 2a = 2\ (p - a).$$

A więc pole trójkąta

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

Ten wzór na obliczenie pola trójkąta znany jest pod nazwą wzoru *Herona*.

Przykład:

$$\begin{array}{l} a = 13\text{ m.} \\ b = 14\text{ m.} \\ c = 15\text{ m.} \\ \hline 2p = 42 \\ p = 21 \end{array}$$

$$p - a = 8$$
$$p - b = 7$$
$$p - c = 6$$

$$S = \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{7^2.4^2.3^2} = 7.4.3 = 84\text{ m}^2.$$

Wniosek. Pole trójkąta równobocznego, którego bok$=a$, będzie:

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

346. **Zadanie.** Mając trzy boki trójkąta, obliczyć promień koła na nim opisanego.

Jak wiadomo (rys. 311):

$$AB \,.\, BC = 2R \,.\, BD,$$

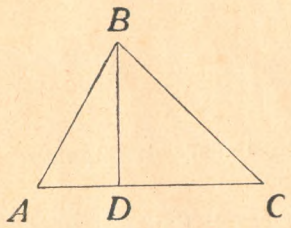
jeżeli R oznacza promień koła opisanego. Ale $AB = c$, $BC = a$, co zaś do BD, to

$$S = \frac{b.BD}{2},$$

skąd $$BD = \frac{2S}{b},$$

a więc będzie

$$a.c = \frac{4R.S}{b},$$



Rys. 311.

skąd $$R = \frac{a.b.c}{4S}, \text{ czyli}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

347. **Zadanie.** Mając trzy boki trójkąta, obliczyć promień koła w ten trójkąt wpisanego.

Niech $AB = c$ (rys. 312), $BC = a$, $AC = b$. Wpiszmy w trójkąt koło i środek O połączmy z wierzchołkami, wtedy oznaczając przez r promień koła wpisanego, mamy:

$$\text{pole } \triangle AOC = \frac{AC \,.\, r}{2},$$

$$\text{pole } \triangle AOB = \frac{AB \,.\, r}{2},$$

$$\text{pole } \triangle BOC = \frac{BC \,.\, r}{2}.$$

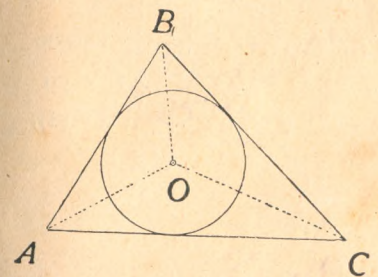
A więc

$$\text{pole } \triangle ABC = S = \frac{(AB + BC + AC)\,r}{2} = \frac{(a+b+c)\,.\,r}{2},$$ czyli oznaczając znowu $a + b + c = 2p$:

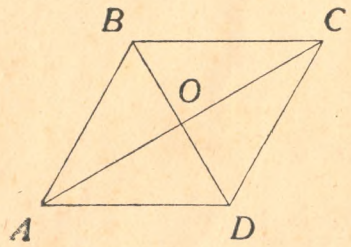
$$S = p \,.\, r,$$

skąd $$r = \frac{S}{p},$$

czyli $$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$



Rys. 312.



Rys. 313.

348. **Zadanie.** Obliczyć pole rombu, mając jego przekątne.

Niech w rombie $ABCD$ (rys. 313) przekątna $AC = d$, $BD = d'$. Ponieważ przekątne rombu są do siebie prostopadłe, będziemy mieli:

$$\text{pole } \triangle BCD = \frac{BD \,.\, OC}{2},$$

$$\text{pole } \triangle ABD = \frac{BD \,.\, AO}{2}.$$

Dodając, otrzymamy

$$\text{pole } ABCD = S = \frac{BD \,.\, (OC + AO)}{2} = \frac{BD \,.\, AC}{2} = \frac{d \,.\, d'}{2},$$

t. j. pole rombu równa się połowie iloczynu jego przekątnych.

349. **Zadanie.** Wyliczyć pole czworokąta, mając jego bok przekątne.

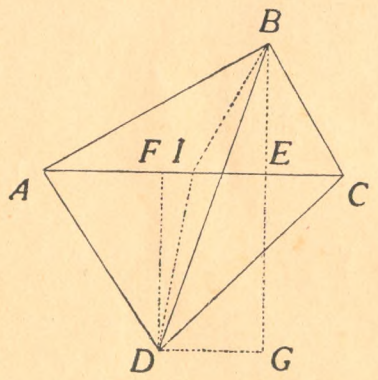
Niech będzie dany czworokąt $ABCD$ (rys. 314), w którym

$$AB=a,\ BC=c,\ AC=l_1,$$
$$DC=b,\ AD=d,\ BD=l_2.$$

Z wierzchołków B i D spuśćmy prostopadłe BE i DF, wtedy pole danego czworokąta będzie

$$S=\frac{AC\,.\,BE}{2}+\frac{AC\,.\,DF}{2}=\frac{AC}{2}\ (BE+DE)={}^1/_2\,l_1\,.\,BG,$$

albo inaczej: $S=\frac{1}{2}l_1\cdot\sqrt{l_2^2-DG^2}=\frac{1}{2}l_1\cdot\sqrt{l_2^2-FE^2}.$



Rys. 314.

Chodzi teraz o wyliczenie EF. Jeżeli punkt I jest środkiem AC, to wtedy z $\triangle\ ABC$ mamy.

$$AB^2-BC^2=2\,AC\,.\,IE \text{ czyli}$$
$$a^2-b^2=2\,l_1\,.\,IE\ .\ .\ .\ (1)$$

Z trójkąta ADC będzie znowu:

$$DC^2-AD^2=2\,AC\,.\,FI, \text{ czyli}$$
$$c^2-d^2=2\,l_1\,.\,FI\ .\ .\ .\ (2).$$
$$a^2-b^2+c^2-d^2=2\,l_1\,.\,FE, \text{ stąd}$$
$$FE=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4\,l_1}.$$

A więc

$$S=\frac{1}{2}l_1\cdot\sqrt{l_2^2-\frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4\,l_1^2}},$$

czyli

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4\,(l_1l_2)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}.$$

Wniosek. Jeżeli na danym czworokącie można opisać koło, wtedy na zasadzie twierdzenia Ptolemeusza

$$l_1\,l_2=ac+bd,$$

a więc wtedy

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4\,(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}.$$

czyli

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)\,(a-b+c+d)\,(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$a+b+c+d=2\,p.$$

otrzymamy

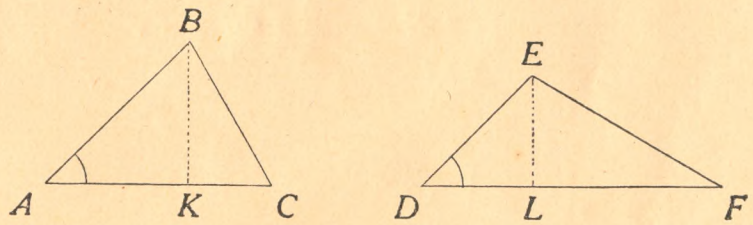
$$S=\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}.$$

Stąd, jeżeli $d=O$, otrzymamy wzór Herona na pole trójkąta.

§ 67. Stosunek pól wielokątów podobnych.

350. **Twierdzenie.** Pola dwóch trójkątów, które mają po kącie równym, tak się mają do siebie, jak iloczyny boków, ten kąt obejmujących.

Niech w trójkątach ABC i DEF (rys. 315) kąty A i D będą równe, pole trójkąta 1-go — S, 2-go — S'.



Rys. 315.

Poprowadźmy wysokości BK i EL, wtedy:

$$\frac{S}{S'}=\frac{AC\,.\,BK}{DF\,.\,EL}=\frac{AC}{DF}\cdot\frac{BK}{EL}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Ale w trójkątach ABK i DEL : $\sphericalangle\ A=\sphericalangle\ D$ z założenia, $\sphericalangle\ AKB=\sphericalangle\ DLE$, jako proste, a więc $\triangle\ ABK\backsim\triangle\ DEL$:

$$\frac{BK}{EL}=\frac{AB}{DE}.$$

Podstawiając teraz w równość (1) zamiast stosunku $\frac{BK}{EL}$ równy mu stosunek $\frac{AB}{DE}$, otrzymamy

$$\frac{S}{S'}=\frac{AC}{DF}\cdot\frac{AB}{DE}$$

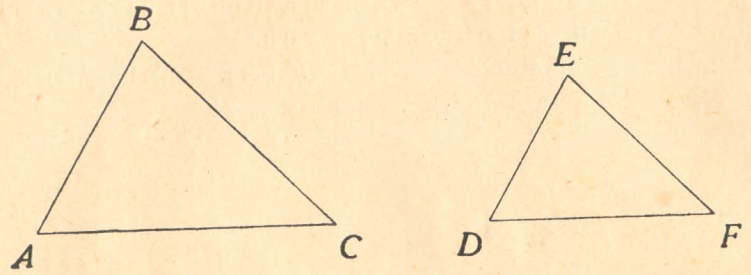
czyli

$$\frac{S}{S'}=\frac{AC\,.\,AB}{DF\,.\,DE}.$$

c. b. d. d.

351. **Twierdzenie.** Pola trójkątów podobnych tak się mają do siebie, jak kwadraty boków odpowiednich.

Niech będzie $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ (rys. 316), pole 1-go trójkąta — S, 2-go — S'.



Rys. 316.

Trójkąty ABC i DEF są podobne, więc $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, a zatem

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF},$$

czyli

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AC}{DF}.$$

Ale z podobieństwa trójkątów mamy

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}.$$

Podstawiając w poprzednią równość zamiast stosunku $\frac{AC}{DF}$ równy mu stosunek $\frac{AB}{DE}$, otrzymamy:

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE},$$

czyli

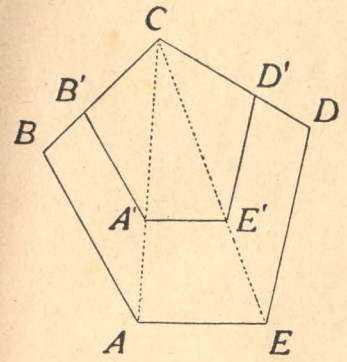
$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{DE^2} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2.$$

To znaczy, że jeżeli np. boki jednego trójkąta są 2, 3, 4... razy większe, niż drugiego, to pole pierwszego trójkąta będzie 4, 9, 16... razy większe, niż drugiego.

352. **Twierdzenie.** Pola wielokątów podobnych tak się mają do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków.

Dwa wielokąty podobne możemy doprowadzić do położenia jednokładności względem jednego z wierzchołków np. C (rys. 317), wtedy prowadząc przekątne CA, CE i t. d., otrzymamy:

$$\triangle CAB \backsim \triangle CA'B';\ \triangle CAE \backsim \triangle CA'E';\ \triangle CDE \backsim \triangle CE'D',$$



Rys. 317.

stąd

$$\frac{\triangle CAB}{\triangle CA'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2},$$

$$\frac{\triangle CAE}{\triangle CA'E'} = \frac{AE^2}{A'E'^2},$$

$$\frac{\triangle CED}{\triangle CE'D'} = \frac{ED^2}{E'D'^2},$$

ale

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{ED}{E'D'} = \ldots,$$

więc

$$\frac{\triangle CAB}{\triangle CA'B'} = \frac{\triangle CAE}{\triangle CA'E'} = \ldots = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

Stąd zaś, oznaczając pole 1-go wielokąta przez S, 2-go — S', mamy

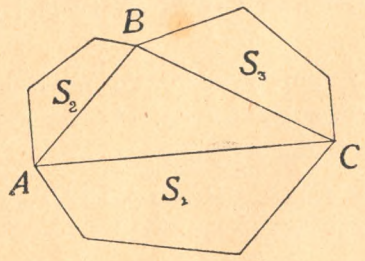
$$\frac{S}{S'} = \frac{AB^2}{A'B'^2},$$

c. b. d. d.

Wniosek. Pola wielokątów foremnych o jednakowej liczbie boków tak się mają do siebie, jak kwadraty promieni lub apotem.

353. **Twierdzenie.** Wielokąt, wystawiony na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, jest równo-

ważny sumie podobnych do niego wielokątów, wystawionych na przyprostokątnych.



Rys. 318.

Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC (rys. 318), wykreślmy wielokąty

$$S_1,\ S_2 \text{ i } S_3$$

i niech będzie $S_1 \backsim S_2 \backsim S_3$, mamy dowieść, że

$$S_1 = S_2 + S_3.$$

Ponieważ wielokąty S_2 i S_1 są podobne, więc

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

z podobieństwa zaś wielokątów S_3 i S_1 będzie

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{BC^2}{AC^2}.$$

Dodając te dwie równości, mamy

$$\frac{S_2 + S_3}{S_1} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2},$$

ale

$$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

a więc

$$\frac{S_2 + S_3}{S_1} = 1$$

czyli

$$S_1 = S_2 + S_3,$$

c. b. d. d.

§ 68. Zadania konstrukcyjne.

Dla rozwiązania zagadnienia geometrycznego, wymagającego konstrukcji pewnej figury, jest rzeczą konieczną dostrzec związek, jaki istnieje pomiędzy jej elementami. Jeżeli ten związek zdołamy ująć w algebraicznem równaniu, to tą drogą możemy odnaleźć sposób konstrukcji. Ta właśnie metoda postępowania, zwana algebraiczną, ma dość często zastosowanie w zadaniach pewnego charakteru, jak to zaraz zobaczymy na przykładach (porównaj § 58).

Zadanie 1. Zbudować kwadrat 2, 3.... razy większy od danego.

Jeżeli bok danego kwadratu nazwiemy a, poszukiwanego zaś—x, to mamy równania:

$$x^2 = 2a^2;\ x^2 = 3a^2,$$

stąd

$$x = a\sqrt{2};\ x = a\sqrt{3}.$$

Zadanie sprowadza się do wykreślenia odcinków podług otrzymanych wzorów, co już potrafimy.

Zadanie 2. Zbudować kwadrat dwa razy mniejszy od danego.

Mamy równanie

$$x^2 = \frac{a^2}{2},\ \text{skąd}\ x = \sqrt{a \cdot \frac{a}{2}}.$$

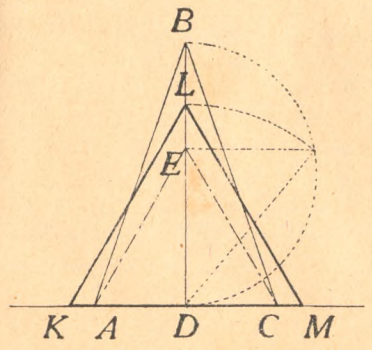
Konstrukcja widoczna.

Zadanie 3. Zbudować kwadrat równoważny prostokątowi danemu.

Jeżeli boki danego prostokąta są: a i b, a bok żądanego kwadratu $= x$, to

$$x^2 = a \cdot b,\ \text{skąd}\ x = \sqrt{a \cdot b}.$$

Konstrukcja wiadoma. Porównaj z twierdzeniem pomocniczem względem tw. Pitagorasa.



Rys. 319.

Zadanie 4. Wykreślić kwadrat $2^1/_2$ razy większy od danego.

Zadanie 5. Kwadrat zamienić na równoważny mu prostokąt o podstawie danej.

Zadanie 6. Wykreślić prostokąt, mając podstawę oraz sumę wysokości i przekątnej.

Zadanie 7. Trójkąt równoramienny zamienić na równoważny mu trójkąt równoboczny.

Analiza. Dany jest trójkąt równoramienny ABC (rys. 319), na jego podstawie AC wykreślmy naprzód trójkąt równoboczny AEC; jeżeli żądanym trójkątem jest KLM, to będzie on podobny do AEC.

Zauważmy naprzód, że

$$\frac{\triangle KLM}{\triangle AEC} = \frac{LD^2}{ED^2},$$

ale $\triangle KLM$ ma być równoważny $\triangle ABC$, a więc

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AEC} = \frac{LD^2}{ED^2}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AEC} = \frac{BD}{ED},$$

a więc

$$\frac{LD^2}{ED^2} = \frac{BD}{ED},$$

skąd

$$LD^2 = BD \cdot ED,$$

wtedy

$$LD = x = \sqrt{BD \cdot ED}.$$

Widzimy, że odcinek LD można będzie znaleźć jako średni proporcjonalny między BD i ED. Mając LD, łatwo już otrzymać trójkąt żądany.

Zadanie 8. Trójkąt dany zamienić na równoważny mu trójkąt równoboczny.

Zadanie 9. Wykreślić miejsce geometryczne takich punktów, których suma kwadratów odległości od danych dwóch punktów jest równa k^2, gdzie k jest odcinkiem danym.

Analiza. Dane są punkty A i B, środkiem odcinka AB niech będzie O, a K niech będzie jednym z punktów żądanego miejsca geometrycznego. Wtedy, stosując twierdzenie o sumie kwadratów dwóch boków trójkąta, możemy napisać:

$$AK^2 + KB^2 = 2\,AO^2 + 2\,KO^2,$$

skąd

$$KO^2 = \frac{AK^2 + KB^2}{2} - AO^2,$$

czyli

$$KO^2 = \frac{k^2}{2} - AO^2,$$

a więc

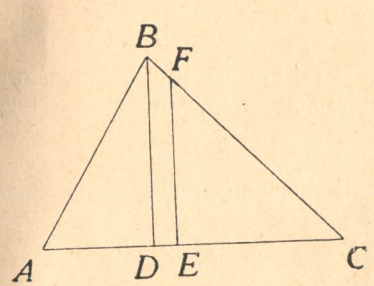
$$KO = \sqrt{\frac{k^2}{2} - AO^2}.$$

Widzimy stąd, że wszystkie punkty żądanego miejsca geometrycznego będą leżały na okręgu, zatoczonym z punktu O promieniem KO.

Zadanie 10. Trójkąt dany podzielić na trzy części równoważne prostemi równoległemi do podstawy.

Zadanie 11. Trójkąt dany podzielić na dwie części w stosunku $m:n$ prostą równoległą do podstawy.

Zadanie 12. Trójkąt dany podzielić na dwie części równoważne prostą prostopadłą do podstawy.



Rys. 320.

Analiza. Niech danym trójkątem będzie ABC (rys. 320), a prosta $EF \perp AC$ jest żądana; w takim razie

$$\frac{\triangle EFC}{\triangle ABC} = \frac{1}{2} = \frac{EC \cdot CF}{AC \cdot BC},$$

ale

$$\frac{CF}{BC} = \frac{EC}{DC},$$

więc $^1/_2 = \frac{EC^2}{AC \cdot DC}$, stąd

$$EC^2 = \frac{AC \cdot DC}{2} = \frac{AC}{2} \cdot DC.$$

A więc odcinek niewiadomy EC wykreślimy, jako średni proporcjonalny między dwoma danemi: $\frac{AC}{2}$ i DC.

§ 69. Ćwiczenia.

1—2. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając jego przyprostokątne a i b:

1. $a = 12{,}4$ cm; $b = 6{,}5$ cm.
2. $a = 2\sqrt{3}$ cm; $b = \sqrt{6}$ cm.

3—5. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając jego przeciwprostokątną c i przyprostokątną a:

3. $c = 13$ cm; $a = 5$ cm;
4. $c = 3{,}4$ cm; $a = 1{,}6$ cm;
5. $c = 5\sqrt{3}$ cm; $a = \sqrt{3}$ cm;

6—9. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając jego przeciwprostokątną i kąt ostry α:

6. $c = 24$ cm; $\alpha = 42^0 20'$.
7. $c = 12{,}5$ cm; $\alpha = 36^0 30'$.
8. $c = 8{,}2$ cm; $\alpha = 54^0 24'$.
9. $c = 10$ cm; $\alpha = 64^0 15'$.

10—13. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając jego przyprostokątną a i kąt ostry α:

10. $a = 18$ cm; $\alpha = 28^0 24'$.
11. $a = 32$ cm; $\alpha = 35^0 12'$.
12. $a = 11{,}2$ cm; $\alpha = 62^0 15'$.
13. $a = 8{,}6$ cm; $\alpha = 58^0 18'$.

14—17. Obliczyć promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym, oraz promień koła wpisanego w ten trójkąt, mając dane przyprostokątne a i b:

14. $a = 25$ cm; $b = 60$ cm.
15. $a = 45$ cm; $b = 24$ cm.
16. $a = 10{,}5$ cm; $b = 10$ cm.
17. $a = 8{,}75$ cm; $b = 3$ cm.

18. Obliczyć promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym oraz promień koła wpisanego w ten trójkąt, mając daną przyprostokątną a i kąt ostry α.

Dane liczbowe z zadań 10—13.

19. Warunki zadania poprzedniego, ale dane są: przeciwprostokątna c i kąt ostry. Dane liczbowe z zadań 6—9.

20—21. Obliczyć pole trójkąta, w którym dane są trzy boki:

20. $a = 33$ cm; $b = 25$ cm; $c = 52$ cm.
21. $a = 28$ cm; $b = 30$ cm; $c = 26$ cm.

22—25. Obliczyć pole trójkąta, mając jego dwa boki b i c oraz kąt ostry α, między niemi zawarty:

22. $b = 8$ cm; $c = 5$ cm; $\alpha = 36^0 40'$.
23. $b = 12$ cm; $c = 8{,}5$ cm; $\alpha = 56^0 24'$.
24. $b = 6{,}4$ cm; $c = 3{,}2$ cm; $\alpha = 62^0 15'$.
25. $b = 10$ cm; $c = 6{,}8$ cm; $\alpha = 42^0 10'$.

26. Biorąc dane liczbowe z zadań 20—21, obliczyć promień koła opisanego na trójkącie oraz promień koła wpisanego w ten trójkąt.

27—28. Obliczyć pole równoległoboku, mając boki a i b oraz kąt ostry między niemi:

27. $a = 20$ cm; $b = 16$ cm; $\alpha = 32^0 12'$.
28. $a = 14$ cm; $b = 12{,}5$ cm; $\alpha = 52^0 24'$.

29. Obliczyć pole rombu, mając jego bok i kąt ostry.

30. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając dane odcinki p i q, na które podzieliła podstawę wysokość, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego.

31. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, jeżeli jedna z jego przyprostokątnych jest a, jej rzut na przeciwprostokątną jest p.

32. Pole trójkąta równobocznego $= Q$. Obliczyć jego bok.

33—34. Obliczyć bok kwadratu, równoważnego trójkątowi o podstawie a i wysokości h:

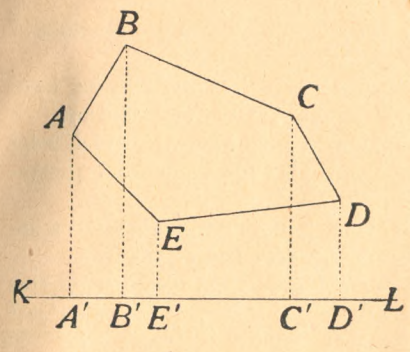
33. $a = 18{,}4$ cm; $h = 12{,}6$ cm.
34. $a = 14{,}25$ cm; $h = 11{,}15$ cm.

35—36. Trójkąt ma podstawę $= a$, wysokość $= h$. Podstawę zmniejszono o d; o ile należy powiększyć jego wysokość, żeby pole trójkąta pozostało bez zmiany?

35. $a = 146$ cm; $h = 96$ cm; $d = 10$ cm.
36. $a = 48$ cm; $h = 52$ cm; $d = 4$ cm.

37. Suma dwóch boków trójkąta $= 124$ cm; wysokości odpowiadające tym bokom są: 105 cm i 50 cm. Obliczyć pole trójkąta.

38. Suma boku i przekątnej kwadratu wynosi 10 cm. Obliczyć jego bok.
39. Przekątna kwadratu $= d$. Obliczyć jego pole.
40. Obliczyć pole trapezu, którego podstawy są: 20 cm. i 6 cm., a boki nierównoległe: 15 cm. i 17 cm.



Rys. 321.

41. Dla obliczenia pola wielokąta $ABCDE$ (rys. 321) poprowadzono prostą KL, a następnie prostopadłe do niej z wierzchołków wielokąta:

$AA^1 = 24$ cm; $BB^1 = 36$ cm.
$CC^1 = 26$ cm; $DD^1 = 23$ cm.
$EE^1 = 18$ cm.

Odległości między spodkami tych prostopadłych są:

$A^1B^1 = 17$ cm; $B^1E^1 = 19$ cm; $E^1C^1 = 18$ cm; $C^1D^1 = 16$ cm. Obliczyć pole wielokąta $ABCDE$.

42—51. Mając promień koła R, obliczyć pole wpisanego w to koło foremnego:

42. trójkąta,
43. czworokąta,
44. sześciokąta,
45. ośmiokąta,
46. dziesięciokąta,
47. pięciokąta,
48. dwunastokąta,
49. dziewięciokąta,
50. piętnastokąta,
51. n-kąta.

52 — 54. Podać interpretację geometryczną następujących tożsamości:

52. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
53. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
54. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

55 — 62. Dany jest odcinek a i kąt ostry α, wykreślić odcinek, który jest równy:

55. $a \cdot \cos \alpha$;
56. $a \cdot tng\ \alpha$;
57. $\dfrac{a}{\cos \alpha}$;
58. $a \cdot \sin \alpha$;
59. $a \cdot cotg\ \alpha$;
60. $\dfrac{a}{\sin \alpha}$.
61. $a \cdot \cos^2 \alpha$;
62. $a \cdot \sin^2 \alpha$;

63. *) Na danym odcinku zbudować prostokąt równoważny kwadratowi danemu.

64. Zbudować prostokąt, mając sumę jego dwóch boków nierównych, a pole równe polu kwadratu danego.

65. Zbudować prostokąt, któryby był równoważny prostokątowi danemu, a obwód miał dany.

66. Znaleźć dwa odcinki, których stosunek jest równy stosunkowi dwóch kwadratów.

67. Podzielić dany odcinek na takie dwie części, żeby różnica kwadratów, wystawionych na każdej z nich, była równa kwadratowi danemu.

68. Większy z boków prostokąta podzielić na takie dwie części, żeby suma kwadratów, wystawionych na każdej z nich, była równa danemu prostokątowi.

69. Dany odcinek przedłużyć o tyle, żeby prostokąt, zbudowany z danego odcinka i jego przedłużenia, był równoważny kwadratowi danemu.

70. Znaleźć takie dwa odcinki, że suma kwadratów, na nich wystawionych, jest równa kwadratowi danemu, a prostokąt, z nich zbudowany, jest równoważny prostokątowi o podstawie a i wysokości b.

71. Podzielić równoległobok na kilka części równoważnych prostemi równoległemi do przekątnej.

72. Podzielić trapez w danym stosunku prostą równoległą do jego podstawy.

73. Podzielić trójkąt na trzy części równoważne dwiema prostemi, z których jedna ma być równoległa do podstawy, a druga do niej prostopadła.

74. Zbudować kwadrat równoważny danemu trójkątowi równobocznemu.

75. W dany trójkąt wpisać prostokąt równoważny kwadratowi danemu.

---

*) W zadaniu tem i następnych należy podać warunki możliwości rozwiązania.

ROZDZIAŁ XIII.

Naroża i wielościany.

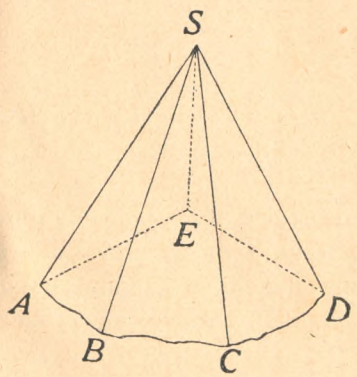
§ 70. Kąty bryłowe czyli naroża.

354. **Określenia.** Kątem bryłowym czyli narożem nazywa się figura, utworzona z kilku płaszczyzn, które, mając punkt wspólny, przecinają się po dwie i są ograniczone temi przecięciami.

Płaszczyzny, które tworzą kąt bryłowy, nazywają się jego ścianami, ich punkt wspólny — wierzchołkiem, a linje przecięcia płaszczyzn — krawędziami kąta bryłowego.

Kąt bryłowy może być trójścienny, czworościenny i t. d., zależnie od liczby ścian.

Kąty, utworzone przez każdą parę krawędzi, nazywają się płaskiemi, np. kąty ASB, BSC i t. d. (rys. 322).



Rys. 322.

Każda krawędź kąta bryłowego jest zarazem krawędzią kąta dwuściennego, utworzonego przez dwie ściany, których przecięciem jest ta krawędź. Tak np. SB jest krawędzią kąta dwuściennego $ASBC$.

Kąt bryłowy nazywa się wypukłym, jeżeli całkowicie leży z jednej strony każdej ze swoich ścian, w przeciwnym razie nazywa się wklęsłym.

355. **Twierdzenie.** W kącie trójściennym każdy z kątów płaskich jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych.

Dany jest kąt trójścienny $SABC$ (rys. 323); niech największym z kątów płaskich będzie ASC. Z punktu S na płaszczyźnie ASC wyprowadźmy prostą SD tak, aby $\sphericalangle DSC = \sphericalangle BSC$, odmierzmy

$SE = SF$ i przez dwa punkty E i F poprowadźmy płaszczyznę, która przetnie ściany kąta trójściennego wzdłuż prostych GE, EH i GH.

Trójkąty FSH i ESH są równe, a więc

$$FH = EH.$$

Z trójkąta GHE mamy $GF + FH < GE + EH$; odrzucając $FH = EH$, mamy

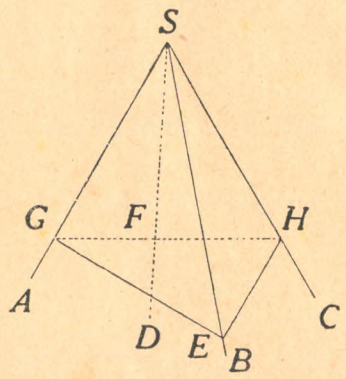
$$GF < GE.$$

Zauważmy teraz, że trójkąty SGF i SGE mają po dwa boki równe, ale trzecie boki nierówne, w takim razie

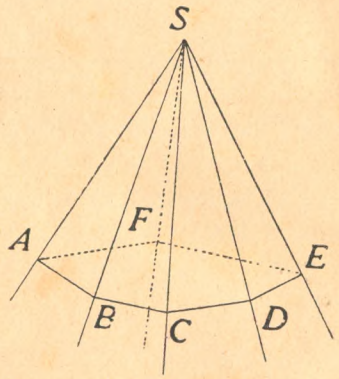
$$\sphericalangle GSF < \sphericalangle GSE.$$

Dodając $\sphericalangle FSH = \sphericalangle ESH$, otrzymamy

$$\sphericalangle ASC < \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC,$$ c. b. d. d.



Rys. 323.



Rys. 324.

356. **Twierdzenie.** W każdym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od czterech kątów prostych.

Na jednej z krawędzi danego naroża (rys. 324) obierzmy punkt A i poprowadźmy płaszczyznę dowolną, taką jednak, któraby przecięła wszystkie pozostałe krawędzie; w przecięciu ze ścianami naroża otrzymamy wielokąt $ABCDEF$, którego każdy wierzchołek będzie wierzchołkiem kąta trójściennego.

Stosując poprzednie twierdzenie, otrzymamy:

$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABS + \sphericalangle CBS$$
$$\sphericalangle BCD < \sphericalangle BCS + \sphericalangle DCS$$
$$\sphericalangle CDE < \sphericalangle CDS + \sphericalangle EDS \text{ i t. d.}$$

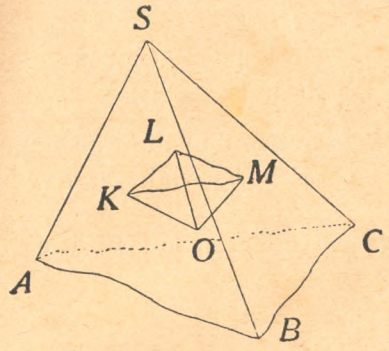
Dodajmy te nierówności, uważając, że po lewej stronie będzie suma kątów wielokąta $ABCDEF$ czyli $2d\,(n-2) = 2dn - 4d$, a po prawej — suma kątów trójkątów ASB, BSC i t. d. oprócz tych, które leżą przy wierzchołku, a których suma x jest niewiadoma, więc po prawej stronie będzie $2dn - x$. Otrzymujemy nierówność

$$2dn - 4d < 2dn - x,$$

a stąd

$$x < 4d.$$

357. **Określenie.** Jeżeli wewnątrz kąta trójściennego obierzemy dowolny punkt, spuścimy z niego prostopadłe do wszystkich ścian i przez każdą parę tych prostopadłych przesuniemy płaszczyznę, to utworzy się kąt trójścienny, który nazywa się spełniającym względem danego.



Rys. 325.

Jeżeli np. z punktu O w kącie trójściennym $SABC$ (rys. 325) spuścimy $OK \perp ASB$, $OL \perp ASC$ i $OM \perp BSC$, to kąt trójścienny $OKLM$ jest spełniającym kąta $SABC$.

Wniosek. Z własności kąta, zawartego między prostopadłemi do ścian kąta dwuściennego (patrz § 43 ćw. 4), wnosimy, że kąty płaskie kąta spełniającego są spełnieniami kątów dwuściennych danego kąta trójściennego.

Więc np. kąt płaski KOM jest spełnieniem kąta dwuściennego $ASBC$, to jest

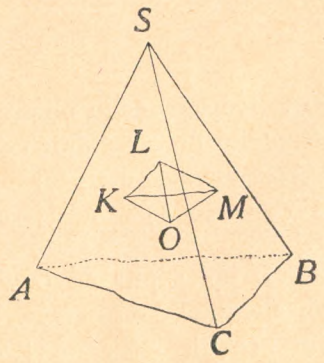
$$\sphericalangle KOM + \sphericalangle (SB) = 180^0 = 2d.$$

358. **Twierdzenie.** Jeżeli jeden kąt trójścienny jest spełniającym drugiego, to nawzajem drugi jest spełniającym pierwszego.

Prosta OK (rys. 325) jest prostopadła do ściany ASB, a OM do ściany BSC, więc płaszczyzna KOM, przechodząca przez te proste, jest jednocześnie prostopadła do obu ścian, a więc do ich linji przecięcia SB i nawzajem $SB \perp KOM$. Tak samo będzie krawędź SA prostopadła do KOL i SC do LOM, a to dowodzi twierdzenia.

Wniosek 1. Kąty płaskie danego kąta trójściennego są spełnieniami kątów dwuściennych kąta spełniającego.

Wniosek 2. Jeżeli dwa kąty trójścienne mają kąty płaskie odpowiednio równe, to ich kąty spełniające mają kąty dwuścienne odpowiednio równe i nawzajem.



Rys. 326.

359. **Twierdzenie.** W kącie trójściennym suma kątów dwuściennych jest większa od dwóch kątów prostych, ale mniejsza od sześciu.

Niech będzie dany kąt trójścienny $SABC$ (rys. 326), wykreślmy kąt spełniający $OKLM$, wtedy:

$$\sphericalangle KOL + \sphericalangle (SA) = 2d,$$
$$\sphericalangle KOM + \sphericalangle (SC) = 2d,$$
$$\sphericalangle LOM + \sphericalangle (SB) = 2d.$$

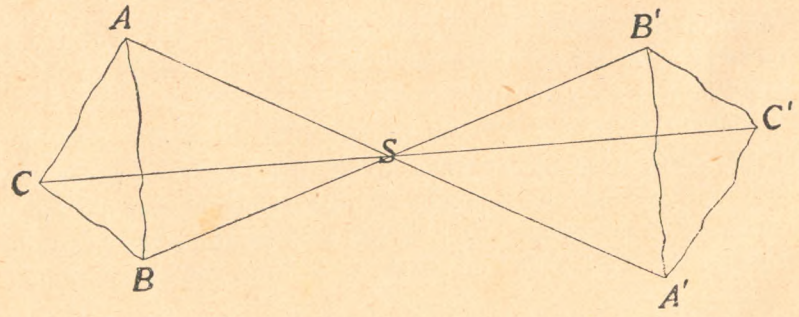
Stąd przez dodanie wnosimy, że suma x kątów dwuściennych równa się sześciu kątom prostym mniej suma kątów płaskich kąta O, a więc $x < 6d$.

Ponieważ suma kątów płaskich jest mniejsza od $4d$, więc będzie $x > 2d$, czyli

$$2d < x < 6d.$$

§ 71. Równość i symetrja kątów trójściennych.

360. **Określenie.** Każdy kąt trójścienny zawiera sześć elementów: trzy kąty płaskie i trzy kąty dwuścienne i jeżeli dwa naroża



Rys. 327.

trójścienne mają wszystkie elementy odpowiednio równe, powinny być równe.

Tu jednak należy zrobić pewne zastrzeżenie: weźmy dowolny kąt trójścienny i przedłużmy jego krawędzie poza wierzchołek S (rys. 327), otrzymamy dwa naroża: $SABC$ i $SA'B'C'$. Wszystkie ich elementy będą sobie odpowiednio równe, ale naroża przystawać do siebie nie będą, ich elementy nie będą następowały w tym samym porządku, czyli będą miały zwrot przeciwny. Takie naroża nazywamy *symetrycznemi*, jeżeli zaś elementy mają zwrot zgodny, będą *równe* czyli *przystające*.

Nie znając więc zwrotu dwóch naroży, nie możemy zgóry przewidzieć, czy będą one równe, czy symetryczne.

Przystępując do warunków równości lub symetrji naroży trójściennych, przekonamy się podobnie, jak to było dla trójkątów, że wystarczać będzie równość trzech elementów.

361. **Twierdzenie.** Jeżeli dwa kąty trójścienne mają kąty płaskie odpowiednio równe, to i kąty dwuścienne mają równe.

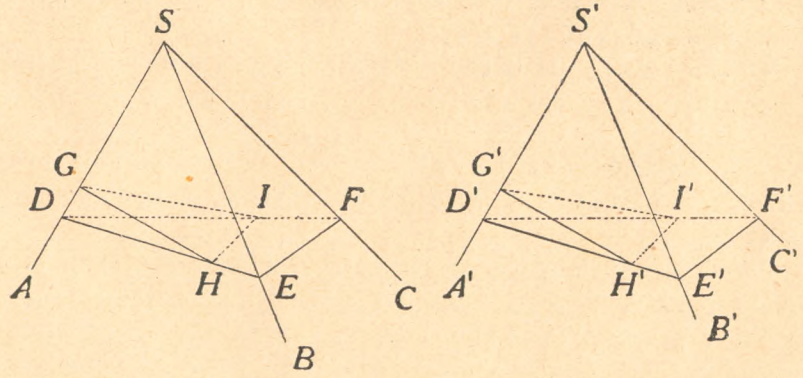
Dane są dwa kąty trójścienne S i S' (rys. 328), w których $\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'S'B'$; $\sphericalangle BSC = \sphericalangle B'S'C'$; $\sphericalangle ASC = \sphericalangle A'S'C'$, mamy dowieść, że kąty dwuścienne są odpowiednio równe.

Na krawędziach danych kątów trójściennych odmierzmy:

$$SD = SE = SF = S'D' = S'E' = S'F'.$$

Otrzymujemy wtedy:

$$\triangle SDE = \triangle S'D'E';\ \triangle SEF = \triangle S'E'F';\ \triangle SFD = \triangle S'F'D',$$



Rys. 328.

dlatego, że te trójkąty mają po dwa boki odpowiednio równe i po kącie między niemi zawartym równym. Z równości trójkątów wynikać będzie, że

$$DE = D'E';\ EF = E'F';\ DF = D'F',$$

a więc

$$\triangle DEF = \triangle D'E'F',$$

stąd zaś

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle F'D'E'.$$

Odmierzmy teraz $DG = D'G'$ i poprowadźmy na płaszczyźnie ASB prostą $GH \perp SA$, również $G'H' \perp S'A'$, wtedy trójkąty prostokątne DGH i $D'G'H'$ będą równe, gdyż: $DG = D'G'$ i $\sphericalangle SDE = \sphericalangle S'D'E'$ (z równości trójkątów SDE i $S'D'E'$), a więc

$$DH = D'H' \text{ i } GH = G'H'.$$

Na płaszczyźnie ASC poprowadźmy $GI \perp SA$, a na płaszczyźnie $A'S'C'$ również $G'I' \perp S'A'$, wtedy $\triangle DGI = \triangle D'G'I'$, a więc

$$DI = D'I' \text{ i } GI = G'I'.$$

Połączmy teraz punkt H z I i punkt H' z I' i zauważmy, że trójkąty DIH i $D'I'H'$ mają po dwa boki i po kącie między niemi zawartym odpowiednio równym, a więc

$$\triangle DIH = \triangle D'I'H',$$

stąd zaś $$HI = H'I'.$$

Nareszcie trójkąty GIH i $G'I'H'$ są równe, gdyż mają po trzy boki odpowiednio równe, a więc

$$\sphericalangle IGH = \sphericalangle I'G'H',$$

a że to są kąty linjowe, odpowiadające kątom dwuściennym (SA) i $(S'A')$, więc $\sphericalangle (SA) = \sphericalangle (S'A')$.

Tak samo można dowieść równości pozostałych kątów.

Stąd wynika bezpośrednio:

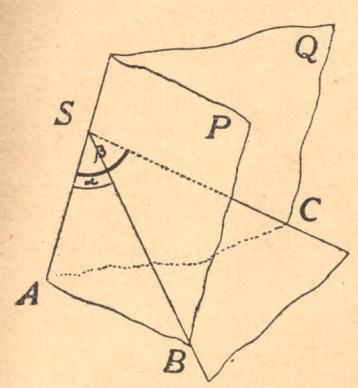
Wniosek. Dwa narożа trójścienne są równe, albo symetryczne, jeżeli mają:

1) trzy kąty płaskie odpowiednio równe, albo
2) trzy kąty dwuścienne odpowiednio równe.

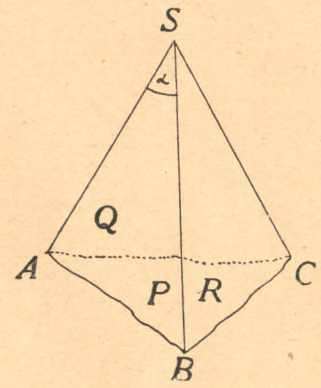
363. **Zadanie.** Zbudować naroże trójścienne, mając dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny, między niemi zawarty.

Jeżeli mamy dany kąt dwuścienny $\sphericalangle (P,Q)$ (rys. 329), to z dowolnego punktu S jego krawędzi możemy poprowadzić na płaszczyźnie P prostą SB pod kątem danym $= \alpha$ do SA, a na płaszczyźnie Q prostą SC pod kątem danym $ASC = \beta$. Dwie przecinające się proste SB i SC wyznaczą trzecią ścianę BSC naroża.

Wniosek. Dwa narożа trójścienne są równe, albo symetryczne, jeżeli mają odpowiednio równe dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny, między niemi zawarty.



Rys. 329.



Rys. 330.

363. **Zadanie.** Zbudować naroże trójścienne, mając dwa kąty dwuścienne i kąt płaski, między niemi zawarty.

Niech będzie dany kąt dwuścienny o krawędzi SA i ścianach P i Q (rys. 330). Na ścianie P pod danym kątem α prowadzimy prostą SB, a następnie, mając płaszczyznę P i krawędź SB, budujemy kąt dwuścienny dany, którego druga ściana R przetnie ścianę Q pierwszego z nich wzdłuż prostej SC. W ten sposób pozostałe kąty płaskie są wyznaczone, a więc i naroże.

Wniosek. Dwa narożа trójścienne są równe, albo symetryczne, jeżeli mają odpowiednio równe: dwa kąty dwuścienne i kąt płaski między niemi zawarty.

§ 72. Pojęcie wielościanu wypukłego. Graniastosłup, pole jego powierzchni.

364. **Określenie.** Wielościanem nazywa się bryła ze wszystkich stron ograniczona płaszczyznami.

Płaszczyzny, które ograniczają wielościan, nazywają się jego ścianami, odcinki linij przecięcia ścian—krawędziami wielościanu, a punkty przecięcia krawędzi—wierzchołkami.

Wielościan nazywa się wypukłym, jeżeli leży po jednej stronie każdej ze swoich ścian. Nadal mówić będziemy o wielościanach wypukłych.

Przekątną wielościanu nazywa się odcinek linji prostej, który łączy dwa wierzchołki niepołożone na tej samej ścianie.

Jedną ze ścian wielościanu uważa się za podstawę, wtedy pozostałe nazywają się ścianami bocznemi.

W niektórych wielościanach, jak to zobaczymy niebawem, bierzemy dwie ściany za podstawy, zwykle te, które są równe i równoległe.

Suma pól ścian bocznych nazywa się polem powierzchni bocznej wielościanu albo krócej: powierzchnią boczną, a suma pól wszystkich ścian bez wyjątku—polem powierzchni całkowitej albo krócej powierzchnią całkowitą.

365. **Określenia.** Graniastosłup jest to wielościan ograniczony z dwu stron równemi sobie wielokątami o bokach odpowiednio równoległych, a z pozostałych stron równoległobokami (rys. 331).

O istnieniu takiej bryły możemy się z łatwością przekonać, budując ją: należy wziąć dowolny wielokąt $ABCDE$, przez wszystkie jego wierzchołki poprowadzić równoległe do siebie proste AA', BB' i t. d., przeciąć je płaszczyzną równoległą do $ABCDE$ i wreszcie przez każdą parę prostych: AA' i BB', BB' i CC' i t. d. przesunąć płaszczyznę.

Wielokąty $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ nazywają się podstawami graniastosłupa, a równoległoboki $ABB'A'$, $BCC'B'$ i t. d. ścianami bocznemi.

Wysokością graniastosłupa nazywa się odcinek, który jest odległością między podstawami.

Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są sobie równe, jako odcinki równoległe, zawarte pomiędzy równoległemi płaszczyznami.

Płaszczyzna, poprowadzona przez dwie krawędzie boczne graniastosłupa, niepołożone na tej samej ścianie, nazywa się płaszczyzną przekątną.

Graniastosłup jest prosty lub pochyły zależnie od tego, czy krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, czy pochyłe.

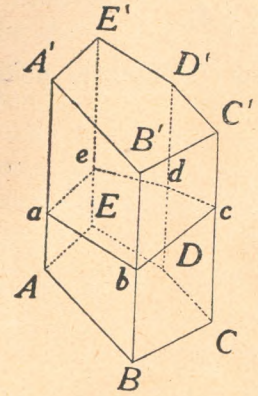
W graniastosłupie prostym każda ze ścian bocznych jest prostokątem, a każda z krawędzi bocznych wysokością graniastosłupa.

Jeżeli graniastosłup pochyły przetniemy płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznych, to wielokąt $abcde$, który otrzymamy

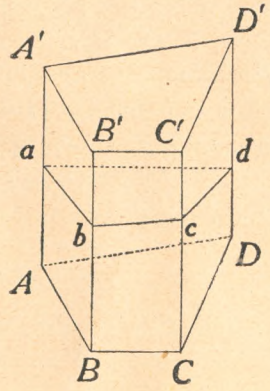
w przecięciu, nazywa się przecięciem prostopadłem. Boki tego wielokąta są oczywiście prostopadłe do krawędzi bocznych.

Graniastosłup prosty jest foremny, jeżeli ma za podstawę wielokąt foremny.

Graniastosłup nazywa się trójkątnym, czworokątnym itd., jeżeli ma za podstawę trójkąt, czworokąt itd.



Rys. 331.



Rys. 332.

366. **Twierdzenie.** Pole powierzchni bocznej graniastosłupa równa się iloczynowi krawędzi bocznej i obwodu przecięcia prostopadłego.

Niech będzie dany graniastosłup pochyły BD' (rys. 332), a wielokąt $abcd$ — jego przecięciem prostopadłem.

Powierzchnia boczna równać się będzie sumie pól wszystkich ścian bocznych, a że ab jest prostopadłe do AA', bc do BB' itd., więc będzie równa $AA' \cdot ab + BB' \cdot bc + CC' \cdot cd + DD' \cdot ad = (ab + bc + cd + ad) \cdot AA'$, c. b. d. d.

Wniosek 1. W graniastosłupie prostym przecięcie prostopadłe równa się podstawie, a więc pole powierzchni bocznej graniastosłupa prostego równa się iloczynowi krawędzi bocznej i obwodu podstawy.

Jeżeli więc obwód podstawy $= P$, a wysokość graniastosłupa $= h$, to pole powierzchni bocznej będzie:

$$S = P \cdot h.$$

Wniosek 2. Aby znaleźć pole powierzchni całkowitej, należy do powierzchni bocznej dodać pola obu podstaw. Jeżeli więc pole podstawy $= B$, to pole powierzchni całkowitej

$$S' = S + 2B.$$

Wniosek 3. Jeżeli graniastosłup jest nietylko prosty, ale i foremny, to pole podstawy

$$B = \frac{P \cdot r}{2},$$

gdzie P oznacza obwód, a r apotemę podstawy, więc wtedy

$$S' = S + P \cdot r$$

czyli

$$S' = P \cdot h + P \cdot r = P \cdot (h + r).$$

Przykład. W graniastosłupie foremnym trójkątnym podstawa ma bok $a = 5$ m, a wysokość $h = 12$ m.

Wtedy pole powierzchni bocznej

$$S = P \cdot h = 3a \cdot h = 180 \text{ m}^2.$$

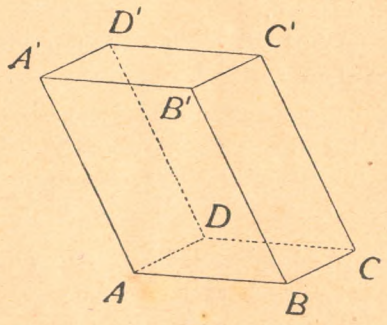
Podwojone pole podstawy:

$$2B = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = 21{,}65 \text{ m}^2,$$

a więc pole powierzchni całkowitej

$$S' = 180 + 21{,}65 = 201{,}65 \text{ m}^2.$$

367. **Określenia.** Graniastosłup, który ma za podstawę równoległobok, nazywa się równoległościanem (rys. 333).



Rys. 333.

Z tego określenia widzimy, że w równoległościanie wszystkie ściany są równoległobokami, a więc każda z nich może być podstawą.

W równoległościanie prostym podstawy są równoległobokami, a ściany boczne prostokątami.

Równoległościan prosty, który ma za podstawę prostokąt, nazywa się prostopadłościanem. Trzy krawędzie, wychodzące z jednego punktu, nazywają się jego wymiarami (długość, szerokość i wysokość). Prostopadłościan, którego wymiary są równe, nazywa się sześcianem.

Łatwo zrozumieć, że w każdym równoległościanie przeciwległe ściany są równe i równoległe.

Tak np. ściany $ADD'A'$ i $BCC'B'$ są równe i równoległe, dlatego że kąty $A'AD$ i $B'BC$ są równe i leżą na płaszczyznach równoległych, a krawędzie boczne są równe.

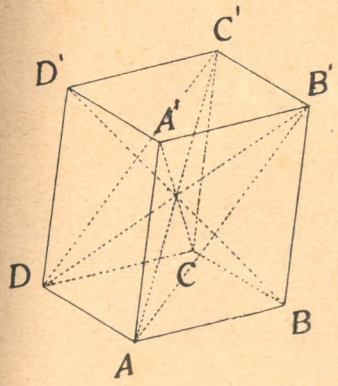
W sześcianie wszystkie ściany są równe i wszystkie krawędzie są równe.

368. **Twierdzenie.** W każdym równoległościanie przekątne przecinają się w jednym punkcie i dzielą się na połowy.

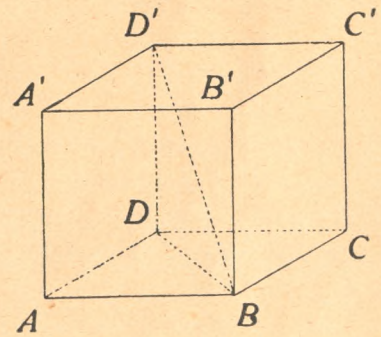
W równoległościanie AC' (rys. 334) zauważmy naprzód dwie przekątne AC' i BD'. Jeżeli przez dwie równoległe DA i $C'B'$ poprowadzimy płaszczyznę, to w przecięciu z równoległościanem otrzymamy czworokąt $DAB'C'$, który jest równoległobokiem, bo $DA \parallel C'B'$, a $DC' \parallel AB'$, jako przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych.

Proste AC' i DB' są przekątnemi tego równoległoboku, a zatem przecinają się i dzielą na połowy.

Biorąc teraz przekątną AC' i jedną z następnych, w podobny sposób przekonamy się, że one w tym samym punkcie dzielą się na połowy. Punkt ten nazywa się środkiem równoległościanu.



Rys. 334.



Rys. 335.

Uwaga. W prostopadłościanie wszystkie cztery przekątne są sobie równe, dlatego że w prostokącie przekątne są sobie równe.

Jeżeli w prostopadłościanie AC' (rys. 335) poprowadzimy przekątną $D'B$, to z trójkąta prostokątnego $DD'B$ będzie

$$D'B^2 = D'D^2 + DB^2,$$

ale znowu z trójkąta ADB mamy

$$DB^2 = AD^2 + AB^2,$$

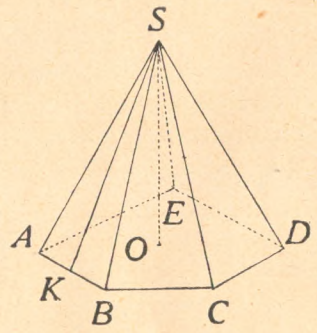
a więc

$$D'B^2 = D'D^2 + AD^2 + AB^2,$$

t. j. w prostopadłościanie kwadrat przekątnej równa się sumie kwadratów jego trzech wymiarów.

§ 73. Ostrosłup, pole jego powierzchni.

369. **Określenia.** Ostrosłupem nazywa się wielościan, którego podstawą jest wielokąt, a ścianami bocznemi trójkąty o wspólnym wierzchołku, np. *SABCDE* (rys. 336).



Rys. 336.

Wspólny punkt *S* wszystkich trójkątów nazywa się wierzchołkiem ostrosłupa.

Odległość *SO* wierzchołka ostrosłupa od podstawy nazywa się jego wysokością.

Płaszczyzna, poprowadzona przez dwie krawędzie boczne, nie położone na jednej ścianie ostrosłupa, nazywa się płaszczyzną przekątną.

Ostrosłup nazywa się trójkątnym, czworokątnym itd., jeżeli ma za podstawę trójkąt, czworokąt i t. d.

Wysokość każdego z trójkątów, które służą za ściany boczne, nazywa się apotemą ostrosłupa.

Ostrosłup nazywamy prostym, jeżeli w jego podstawę można wpisać koło i spodek jego wysokości jest środkiem tego koła. Wszelki inny ostrosłup, który powyższych warunków nie spełnia, nazywa się pochyłym.

Łatwo wyrozumować, że w ostrosłupie prostym wszystkie apotemy t. j. wysokości ścian bocznych są sobie równe.

Ostrosłup prosty nazywa się foremnym, jeżeli ma za podstawę wielokąt foremny.

W ostrosłupie foremnym:

1) ścianami bocznemi są trójkąty równoramienne równe sobie;

2) apotema dzieli bok podstawy na połowy;

3) spodek wysokości jest środkiem podstawy (t. j. środkiem koła wpisanego w podstawę).

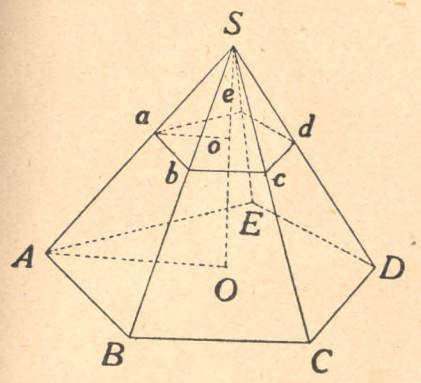
370. **Twierdzenie.** Jeżeli ostrosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, to:

1) krawędzie boczne, apotemy i wysokość podzielą się na odcinki do siebie proporcjonalne;

2) podstawa i przecięcie będą wielokątami podobnemi i

3) pola podstawy i przecięcia będą proporcjonalne do kwadratów ich odległości od wierzchołka ostrosłupa.

Ostrosłup *SABCDE* (rys. 337) przetnijmy płaszczyzną równoległą do podstawy; przecięciem niech będzie wielokąt *abcde*.



Rys. 337.

1) Z jednokładności otrzymanych figur mamy:

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\ldots=\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}\ldots$$

Ale spuściwszy wysokość *SO*, otrzymamy znowu

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SO}{So},$$

a więc będzie

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\ldots=\frac{SO}{So}.$$

W tym samym stosunku będą oczywiście apotemy.

2) Z poprzednio otrzymanych stosunków będziemy mieli

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\ldots$$

A że oprócz tego, jak łatwo zauważyć, $\sphericalangle A=\sphericalangle a$, $\sphericalangle B=\sphericalangle b$ i t. d., więc wielokąty *ABCDE* i *abcde* są podobne.

3) Pola wielokątów podobnych są proporcjonalne do kwadratów odpowiednich boków, więc

$$\frac{\text{pole } ABCDE}{\text{pole } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2},$$

ale

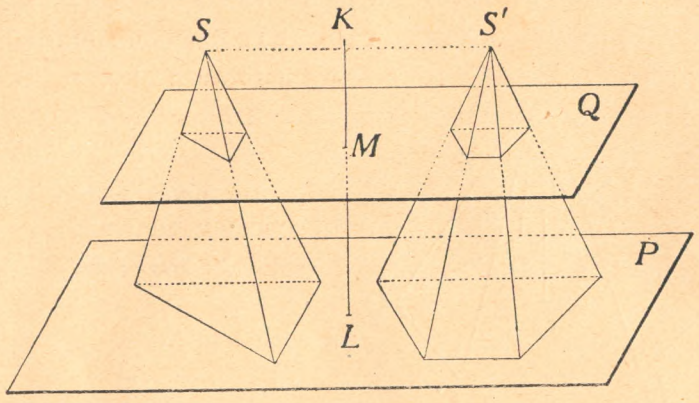
$$\frac{AB}{ab}=\frac{SO}{So},$$

bo każdy z tych stosunków, jak widzieliśmy, był równy $\frac{SA}{Sa}$, a więc

$$\frac{\text{pole } ABCDE}{\text{pole } abcde}=\frac{SO^2}{So^2}.$$

Wniosek. Jeżeli dwa ostrosłupy mają wysokości równe, a podstawy równoważne, to ich przecięcia, jednakowo od wierzchołków ostrosłupów odległe, są równoważne.

Niech będą dane dwa ostrosłupy S i S' (rys. 338) o wysokości KL; przetnijmy je płaszczyzną Q, równoległą do płaszczyzny podstaw P, w odległości KM od wierzchołków.



Rys. 338.

Niech pola podstaw będą B i B', a pola przecięć — b i b', wtedy w pierwszym ostrosłupie będzie

$$\frac{B}{b} = \frac{LK^2}{KM^2}.$$

W drugim $$\frac{B'}{b'} = \frac{KL^2}{KM^2},$$

stąd $$\frac{B}{b} = \frac{B'}{b'},$$

a że $B = B'$, więc $b = b'$, c. b. d. d.

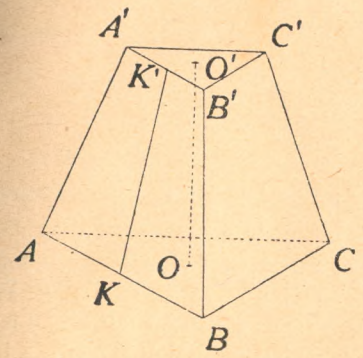
371. **Określenie.** Część ostrosłupa, zawarta między dwoma równoległemi przecięciami, nazywa się ostrosłupem ściętym albo pniem ostrosłupowym, np. AC' (rys. 339).

Wielokąty ABC i $A'B'C'$ są podstawami ostrosłupa ściętego, odległość OO' pomiędzy niemi — wysokością, wysokość KK' trapezu, który służy za ścianę boczną — apotemą.

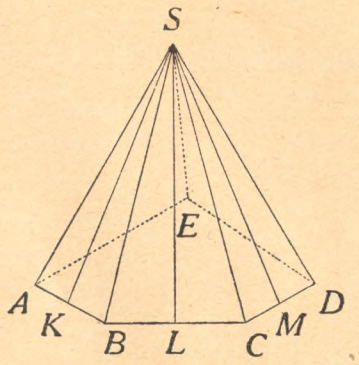
Ostrosłup ścięty jest prosty lub pochyły, zależnie od tego, czy go otrzymano z ostrosłupa prostego lub pochyłego.

Ostrosłup ścięty prosty nazywa się foremnym, jeżeli ma za podstawy wielokąty foremne, wtedy ścianami bocznemi są trapezy równoramienne, a wysokość ostrosłupa przechodzi przez środki podstaw.

Z poprzedniego twierdzenia wnosimy, że w ostrosłupie ściętym podstawy są do siebie podobne.



Rys. 339.



Rys. 340.

372. **Twierdzenie.** Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prostego równa się połowie iloczynu obwodu podstawy i apotemy ostrosłupa.

Dany jest ostrosłup prosty $SABCDE$ (rys. 340). Spuśćmy apotemy SK, SL, SM i t. d., wtedy

$$pole\ \triangle\ ASB = \frac{AB \cdot SK}{2}$$

$$pole\ \triangle\ BSC = \frac{BC \cdot SL}{2}$$

$$pole\ \triangle\ CSD = \frac{CD \cdot SM}{2}$$ i t. d.

Dodając te równości do siebie i uważając, że w ostrosłupie prostym apotemy są równe, otrzymamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa: $S = \frac{(AB + BC + CD + \ .\ .\ .)\ SK}{2}$ czyli oznaczając obwód podstawy literą P, a apotemę ostrosłupa — l, otrzymamy

$$S = \frac{P \cdot l}{2}.$$

Wniosek 1. Jeżeli pole podstawy $= B$, to pole powierzchni całkowitej:

$$S' = S + B.$$

Wniosek 2. Jeżeli ostrosłup jest foremny, to pole podstawy

$$B = \frac{P.r}{2},$$

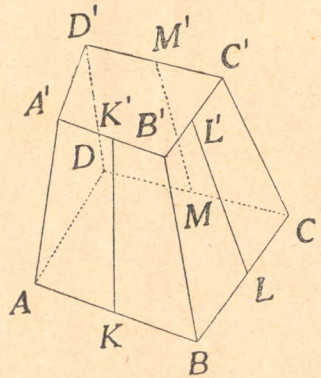
gdzie r oznacza apotemę podstawy, a więc

$$S' = \frac{P.l}{2} + \frac{P.r}{2},$$

czyli

$$S' = \frac{P}{2}(l + r).$$

373. **Twierdzenie.** Pole powierzchni bocznej ostrosłupa ściętego prostego równa się iloczynowi apotemy ostrosłupa i połowy sumy obwodów jego obu podstaw.



Rys. 341.

Dany jest ostrosłup ścięty prosty AC' (rys. 341). Poprowadźmy apotemy KK', LL' i t. d. i znajdźmy pole każdej ściany bocznej:

$$\text{pole } ABB'A' = \frac{AB + A'B'}{2}.KK'$$

$$\text{pole } BB'C'C = \frac{BC + B'C'}{2}.LL'$$

$$\text{pole } CC'D'D = \frac{DC + D'C'}{2}.MM' \text{ itd.}$$

Dodając do siebie te równości i pamiętając, że w ostrosłupie prostym apotemy są sobie równe, otrzymamy pole powierzchni bocznej

$$S = \frac{(AB + BC + DC + \ldots) + (A'B' + B'C' + \ldots)}{2}.KK',$$

czyli oznaczając obwód podstawy dolnej literą P, górnej — P', apotemę — l:

$$S = \frac{P + P'}{2}.l.$$

Wniosek 1. Powierzchnia całkowita będzie

$$S' = S + B + B',$$

gdzie B i B' oznaczają pola podstaw.

Wniosek 2. Jeżeli ostrosłup ścięty jest foremny i r, r' są apotemy, a P i P' obwody podstaw, to

$$B = \frac{P.r}{2};\quad B' = \frac{P'.r'}{2}.$$

A więc

$$S^1 = \frac{P + P'}{2}.l + \frac{P.r}{2} + \frac{P'.r'}{2} = \frac{P'}{2}(l + r) + \frac{P'}{2}(l + r').$$

Wniosek 3. Jeżeli ostrosłup ścięty przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez środki krawędzi bocznych, to w przecięciu otrzymamy wielokąt, którego obwód będzie się równał połowie sumy obwodów obu podstaw (dlatego, że każdy bok, jako linja środkowa trapezu, = połowie sumy boków równoległych). Takie przecięcie nazywa się *przecięciem środkowem.*

A więc pole powierzchni bocznej ostrosłupa ściętego prostego równa się iloczynowi apotemy ostrosłupa i obwodu przecięcia środkowego.

§ 74. Wielościany foremne.

374. Jeżeli liczbę ścian, ograniczających dany wielościan wypukły, oznaczymy przez S, liczbę wszystkich jego krawędzi K, a liczbę wierzchołków przez W, to między temi liczbami można ustalić pewną prostą zależność.

Wyobraźmy sobie materjalny wielościan (np. tekturowy); jeżeli go rozetniemy wzdłuż krawędzi, tak jednak, aby jedna ściana przylegała do sąsiedniej, to możemy całą bryłę rozwinąć na płaszczyźnie. Otrzymamy w ten sposób szereg wielokątów o bokach do siebie przystających parami.

Rozpatrzmy jeden z tych wielokątów, czyli jedną ze ścian: wtedy $S = 1$, liczba boków tego wielokąta, czyli liczba krawędzi będzie równa liczbie wierzchołków, t. j. $W = K$, a zatem otrzymujemy zależność

$$S + W = K + 1.$$

Uważajmy teraz dwa przyległe do siebie wielokąty łącznie: będzie wtedy $S = 2$; ponieważ te wielokąty będą miały jeden bok wspólny i dwa wierzchołki wspólne, więc liczba krawędzi będzie o 1 większa niż wierzchołków: $K = W + 1$, a więc będzie znowu

$$S + W = K + 1.$$

Dołączając trzeci wielokąt, spostrzeżemy w taki sam sposób, że zależność, poprzednio otrzymana, pozostanie bez zmiany (będzie $S = 3$;

$W = K - 2$). Postępując w ten sposób dalej, stwierdzić możemy, że wciąż zależność nasza będzie taka sama, aż dopiero, kiedy dołączymy ostatni wielokąt i wszystkie wielokąty zamkniemy, tworząc dany wielościan, spostrzeżemy, że przez ostatnie dołączenie liczba krawędzi i wierzchołków pozostanie bez zmiany (były one już rozważone poprzednio), przybędzie tylko jedna ściana, a zatem będzie ostatecznie

$$S + W = K + 2.$$

Tą drogą doszliśmy do zależności, która nosi nazwę **twierdzenia Eulera:**

w wielościanie wypukłym liczba ścian i wierzchołków jest o 2 większa od liczby krawędzi.

Np. w sześcianie mamy: 6 ścian, 8 wierzchołków i 12 krawędzi: $6 + 8 = 12 + 2$.

W ostrosłupie 5-kątnym: 6 ścian, 10 krawędzi i 6 wierzchołków, więc znowu $S + W = K + 2$ i t. d.

Uwaga. Twierdzenie powyższe nosi imię *Eulera*, jakkolwiek nie ulega wątpliwości, że pierwszy je udowodnił znakomity filozof i matematyk francuski *Descartes* (1596 — 1650), ale opublikowano je dopiero w 1860 r., już kiedy *Euler* w drugiej połowie XVII wieku podał ją do ogólnej wiadomości. Są zresztą podstawy do mniemania, że już *Archimedesowi* twierdzenie to nie było obce.

375. Wielościan wypukły, ograniczony równemi sobie wielokątami foremnemi, który ma wszystkie naroża równe, nazywa się foremnym, inaczej umiarowym. Stąd już widać, że wielościan foremny ma wszystkie ściany, wszystkie krawędzie, kąty płaskie i kąty dwuścienne równe.

Łatwo można się przekonać, że wielościanów foremnych może istnieć nie więcej nad pięć.

Istotnie: najprostszą ścianą może być trójkąt foremny, a ponieważ jego kąt jest równy 60^0, suma zaś wszystkich kątów płaskich naroża musi być mniejsza od 360^0, więc z jednego wierzchołka mogą wychodzić: 3 krawędzie ($60^0 . 3 = 180^0 < 360^0$), albo 4 krawędzie ($60^0 . 4 = 240^0 < 360^0$), albo wreszcie 5 krawędzi ($60^0 . 5 = 300^0 < 360^0$). A zatem z trójkątów można zbudować nie więcej nad 3 wielościany foremne.

Z kwadratów składać się może tylko jeden wielościan ($3 . 90^0 = 270^0$).

Z pięciokątów foremnych składać się może również tylko jeden, gdyż kąt pięciokąta foremnego $= \frac{180^0 . 3}{3} = 108^0$; ($108^0 . 3 < 360^0$).

Z sześciokątów, ani tem bardziej z wielokątów o większej liczbie boków, wielościanu foremnego zbudować się nie da.

376. O liczbie wielościanów foremnych możemy się także przekonać z twierdzenia Eulera.

Jeżeli mianowicie liczbę krawędzi, wychodzących z każdego wierzchołka, oznaczymy przez m, to ze wszystkich W wierzchołków otrzymalibyśmy $W . m$ krawędzi, ale, jak to łatwo przewidzieć, każda z nich powtarzać się będzie dwa razy, więc istotna liczba wszystkich krawędzi będzie:

$$K = \frac{W . m}{2}, \text{ stąd } W = \frac{2K}{m}.$$

Jeżeli dalej liczbę krawędzi, ograniczających każdą ścianę, oznaczymy przez n, to liczba krawędzi wszystkich S ścian byłaby $S . n$, ale znowu w rzeczywistości będzie ich 2 razy mniej:

$$K = \frac{S . n}{2}.$$

Podstawiając otrzymane wartości na W i K we wzór Eulera:

$$W + S = K + 2,$$

otrzymamy:

$$S = \frac{4m}{2(m + n) - mn}.$$

Zakładając teraz $n = 3$, mamy

$$S = \frac{4m}{6 - m},$$

a więc m może mieć wartości: 3, 4 i 5, wtedy mamy $S = 4$, $S = 8$, $S = 20$.

Biorąc $n = 4$ i $n = 5$, mamy:

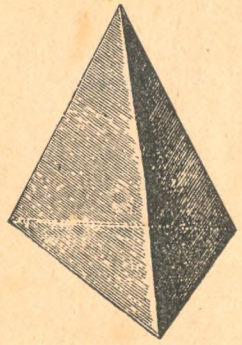
$$S = \frac{2m}{4 - m} \text{ i } S = \frac{4m}{10 - 3m};$$

dla m może istnieć tylko wartość $m = 3$, wtedy $S = 6$; $S = 12$.

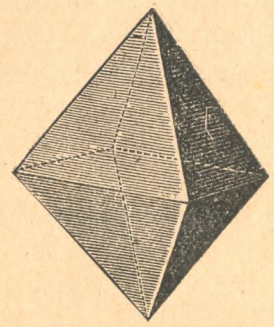
W ten sposób potwierdzają się nasze poprzednie wywody, inaczej otrzymane.

377. Wielościan foremny, ograniczony czterema trójkątami równobocznemi, nazywa się czworościanem foremnym czyli tetraedrem (rys. 342).

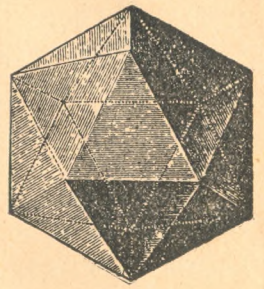
Wielościan foremny, ograniczony 8 trójkątami, nazywa się ośmiościanem foremnym czyli oktaedrem (rys. 343); 20-tu trójkątami ograniczony jest dwudziestościan foremny czyli ikosaedr (rys. 344).



Rys. 342.

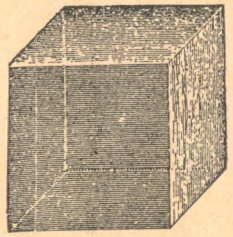


Rys. 343.

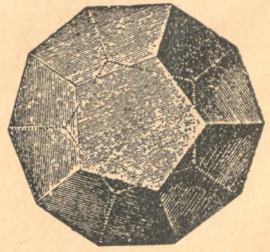


Rys. 344.

6 kwadratami ograniczony jest sześcian foremny czyli poprostu sześcian, inaczej heksaedr (rys. 345).



Rys. 345.



Rys. 346.

Wreszcie 12 pięciokątów ogranicza dwunastościan foremny czyli dodekaedr (rys. 346).

378. O istnieniu wymienionych brył przekonać się można, budując je:

1) Czworościan zbudować łatwo, jako ostrosłup, który ma za podstawę trójkąt równoboczny, a wierzchołek w odległości równej bokowi tego trójkąta od każdego z jego wierzchołków.

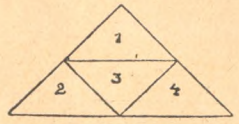
2) Ośmiościan składa się z dwóch ostrosłupów o wspólnej podstawie kwadratowej, a krawędzie boczne są równe bokom kwadratu.

3) Dwudziestościan (rys. 344) zbudować już trudniej. Ale zauważmy, że górna jego część jest ostrosłupem, którego podstawą jest pięciokąt foremny o boku równym krawędzi całej bryły. Ten pięciokąt zbudować możemy, uważając, że krawędzie boczne są równe bokom wspomnianego pięciokąta. W ten sposób będziemy mieli kąt bryłowy zbudowany; wykonawszy następnie konstrukcję takiego samego naroża przy każdym wierzchołku podstawy, otrzymamy żądaną bryłę.

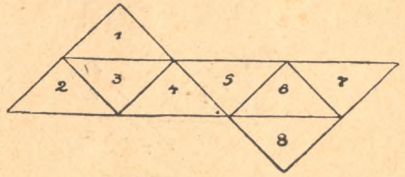
4) Budowa sześcianu jest oczywista.

5) Dwunastościan otrzymamy, jeżeli wykreślimy pięciokąt foremny i do każdego z jego boków przystawimy równe mu pięciokąty w ten sposób, żeby przy każdym wierzchołku utworzyło się trójścienne naroże — otrzymamy połowę całej bryły. Druga połowa będzie symetrycznie z pierwszą położona.

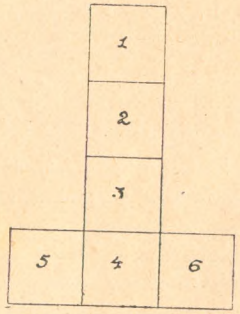
379. Wyobraźmy sobie, że którakolwiek ściana wielościanu obraca się dokoła jednego ze swych boków, aż upadnie na płaszczyznę, która jest przedłużeniem drugiej ściany; następnie te dwie ściany obracają się znowu dokoła boku i upadną na przedłużenie trzeciej ściany i t. d., aż wreszcie wszystkie ściany będą leżały na jednej płaszczyźnie. W ten sposób otrzymamy na płaszczyźnie figurę, która nazywa się siatką wielościanu. Będzie ona składała się ze wszystkich wielokątów, ograniczających dany wielościan.



Rys. 347.



Rys. 348.

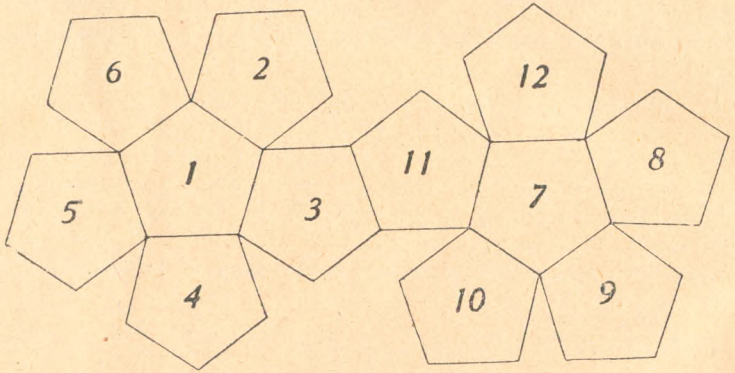


Rys. 349.

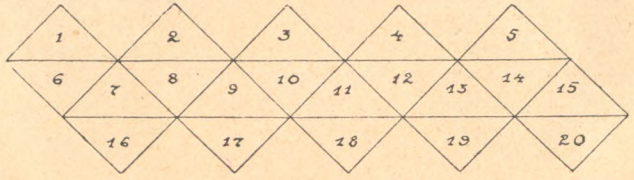
Jeżeli taką siatkę zrobimy na kartonie, zegniemy wzdłuż wszystkich krawędzi i wolne krawędzie ze sobą połączymy, otrzymamy m o d e l wielościanu.

Na rys. 347, 348, 349, 350, 351 są przedstawione siatki wielościanów foremnych; podług nich można sformować modele.

Uwaga. Wielościany foremne znali już *Pitagorejczycy* w VI w. przed Chr. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę, a od czasów *Platona* uważano piąty wielościan foremny, dwunastościan, jako postać wszechświata.



Rys. 350.



Rys. 351.

§ 75. Graniastosłupy równoważne. Objętość graniastosłupa.

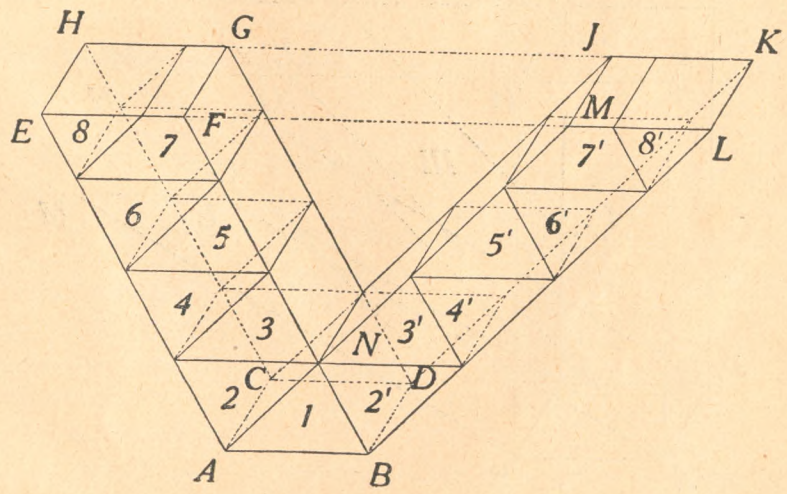
380. **Określenie.** Przypominając sobie, co było mówione o równoważności wielokątów (patrz § 33), powiemy, że:

d w a g r a n i a s t o s ł u p y s ą r ó w n o w a ż n e, j e ż e l i j e m o ż n a p o d z i e l i ć n a t ę s a m ą i l o ś ć w i e l o ś c i a n ó w o d p o w i e d n i o d o s i e b i e p r z y s t a j ą c y c h, oraz

d w a g r a n i a s t o s ł u p y, z k t ó r y c h k a ż d y z o s o b n a j e s t r ó w n o w a ż n y t r z e c i e m u, s ą r ó w n o w a ż n e.

Jeżeli dwa graniastosłupy są równe czyli przystające, to oczywiście są także i równoważne.

Jakie warunki muszą być spełnione dla równości wielościanów wogóle, wyrozumować łatwo: muszą mieć wszystkie ściany i wszystkie naroża odpowiednio równe i ściany muszą następować po sobie w tym samym porządku. Dla równości graniastosłupów liczba tych warunków znacznie się, oczywiście, zredukuje.



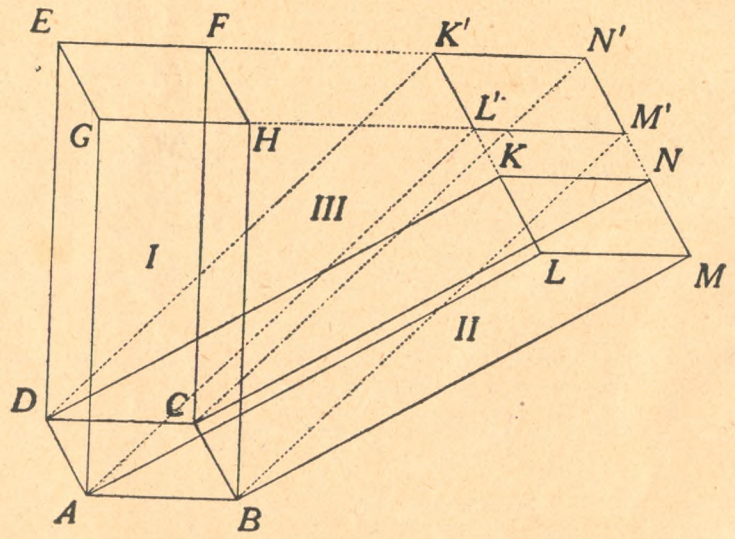
Rys. 352.

381. **Twierdzenie.** Dwa równoległościany o równych podstawach i równych wysokościach są równoważne.

Dla ułatwienia rozumowania, rozważymy naprzód dwa równoległościany o wspólnej podstawie, mające górne podstawy położone między temi samemi równoległemi prostemi (rys. 352).

Na zasadzie znanego pewnika Archimedesa, odcinkami AN i BN wyczerpiemy krawędzie BF i AM i równoległościany podzielimy na jednakową liczbę wielościanów do siebie przystających, jak wskazuje rysunek.

Jeżeli teraz weźmiemy przypadek ogólniejszy, kiedy podstawy górne nie będą już położone między temi samemi równoległemi prostemi (rys. 353), to bez trudu możemy go sprowadzić do przypadku poprzedniego. Wystarczy zbudować równoległościan pomocniczy (III), przedłużając boki obu górnych podstaw równoległościanów I i II, jak wskazuje rysunek.



Rys. 353.

Wtedy równoległościany I i II będą równoważne, jako równoważne każdy zosobna równoległościanowi III.

382. **Wnioski.** Z powyższego twierdzenia wynikać będzie:

1. Równoległościan pochyły można przekształcić na równoważny mu równoległościan prosty o tej samej podstawie i tej samej wysokości.

2. Każdy równoległościan można zamienić na równoważny mu prostopadłościan o tej samej wysokości, a podstawie równoważnej.

3. Równoległościan można zamienić na równoważny mu graniastosłup, który będzie miał wysokość tę samą, a za podstawę trójkąt równoważny podstawie danego równoległościanu.

4. Graniastosłup wielokątny można zamienić na trójkątny, a ten na równoległościan, a dalej na prostopadłościan. Wszelki zaś prostopadłościan można przekształcić na równoważny mu prostopadłościan o danej podstawie. (Porównaj § 34).

Z powyższego wysnuć można ważny wniosek, że graniastosłupy podobnie, jak wielokąty, kąty, odcinki, stanowią gatunek wielkości geometrycznych, które mogą być ze sobą porównywane, dodawane, odejmowane i t. p. — mogą być mierzone. (Porównaj § 33).

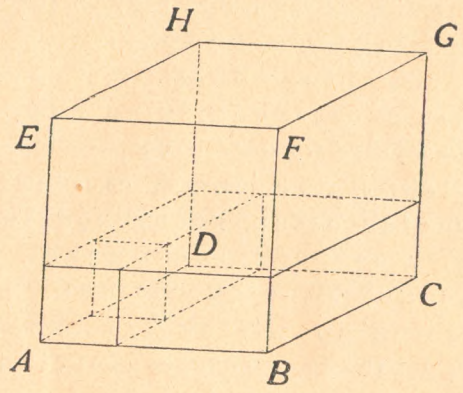
383. **Określenia.** Ażeby dokonać pomiaru graniastosłupa, należy go porównać z graniastosłupem, przyjętym za jednostkę. Liczba, która wyraża stosunek graniastosłupa do przyjętej jednostki, nazywa się liczbą wymiarową jego objętości, albo krócej *objętością*.

Za jednostkę objętości uważa się najprostszy graniastosłup, mianowicie sześcian, którego każda krawędź jest równa jednostce linjowej, więc metr sześcienny (m^3), t. j. sześcian o krawędzi 1 metra, centymetr sześcienny (cm^3) czyli sześcian o krawędzi 1 centymetra i t. d.

W zagadnieniu, dotyczącem obliczania objętości graniastosłupów podobnie, jak to zrobiliśmy, mówiąc o polu wielokąta, założymy, że: graniastosłupy równoważne mają objętości równe; graniastosłup, który jest sumą dwóch graniastosłupów danych, ma objętość równą sumie objętości tych graniastosłupów.

384. Ponieważ graniastosłup można przekształcić na równoważny mu prostopadłościan, więc zadaniem zasadniczem dla nas będzie obliczenie o b j ę t o ś c i p r o s t o p a d ł o ś c i a n u.

Niech będzie dany prostopadłościan AG (rys. 354), za jednostkę objętości weźmiemy sześcian M (=1 cm³).



Rys. 354.

Dla obliczenia objętości prostop. AG czyli obliczenia, ile razy w nim pomieści się sześcian M, musimy znaleźć stosunek każdego z trzech wymiarów: AB, AD i AE do krawędzi tego sześcianu.

Jeżeli te stosunki są liczbami całkowitemi: a, b i c, to liczba wymiarowa objętości prostopadłościanu będzie

$$V = a.\ b.\ c.$$

Jeżeli te stosunki są liczbami ułamkowemi, to znaczyć będzie, że pewna część krawędzi sześcianu pomieści się w omawianych odcinkach całkowitą liczbę razy i znowu będzie

$$V = k.\ l.\ m,$$

gdzie k, l, m oznaczają ułamkowe wartości stosunków.

Wreszcie może zajść przypadek, kiedy żaden z odcinków AB, AD i AE nie jest spółmierny z krawędzią sześcianu. Wtedy wartość każdego z trzech stosunków będzie liczbą niewymierną, wyznaczoną przez przekrój dwu klas liczb wymiernych i objętością prostopadłościanu nazwiemy liczbę niewymierną, wyznaczoną przez taki przekrój, gdzie do niższej klasy należeć będą iloczyny liczb, należących do trzech poprzednich klas niższych:

$$przekrój\ (a.\ b.\ c.) = prz.\ (a).\ prz.\ (b).\ prz.\ (c).$$

Ponieważ liczba wymiarowa odcinka AB, pomnożona przez liczbę wymiarową AD, daje pole podstawy prostopadłościanu, zaś AE jest jego wysokością, więc wogóle możemy powiedzieć, że:

o b j ę t o ś ć p r o s t o p a d ł o ś c i a n u j e s t r ó w n a p o l u j e g o p o d s t a w y p o m n o ż o n e m u p r z e z w y s o k o ś ć p r o s t o p a d ł o ś c i a n u.

Ściślej należało powiedzieć: „przez liczbę wymiarową albo długość wysokości".

Ponieważ w sześcianie wszystkie trzy wymiary są sobie równe, więc będzie

$$V = a^3$$

t. j. o b j ę t o ś ć s z e ś c i a n u j e s t r ó w n a t r z e c i e j p o t ę d z e j e g o k r a w ę d z i (długości krawędzi).

Dlatego trzecią potęgę nazywamy sześcianem.

Wniosek. Każdy równoległościan można przekształcić na równoważny mu prostopadłościan o tej samej wysokości, a podstawie równoważnej; graniastosłup trójkątny można przekształcić na równoważny mu równoległościan, a graniastosłup wielokątny na równoważny mu trójkątny (patrz 382).

Stąd wynika, że

o b j ę t o ś ć g r a n i a s t o s ł u p a j e s t r ó w n a p o l u j e g o p o d s t a w y, p o m n o ż o n e m u p r z e z w y s o k o ś ć g r a n i a s t o s ł u p a, czyli

$$V = B.h,$$

gdzie B oznacza pole podstawy, zaś h wysokość graniastosłupa.

§ 76. Ćwiczenia.

1. Kąt dwuścienny podzielić na połowy.

2. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od dwóch przecinających się płaszczyzn; od trzech?

(3—5). Udowodnić, że w narożu trójściennem:

3. płaszczyzny, dzielące na połowy kąty dwuścienne, przecinają się wzdłuż jednej prostej.

4. płaszczyzny, poprowadzone przez jego krawędzie i prostopadłe do przeciwległych ścian, przecinają się według jednej prostej.

5. płaszczyzny, przechodzące przez jego krawędzie i przez dwusieczne kątów płaskich ścian przeciwległych, przecinają się według jednej prostej.

(6—10). Jaką figurę otrzymamy w przekroju, jeżeli:

6. graniastosłup trójkątny przetniemy płaszczyzną, która przechodzi przez jeden z boków podstawy i wierzchołek ostrosłupa, niepołożony na jednej płaszczyźnie z tym bokiem?

7. graniastosłup trójkątny przetniemy płaszczyzną, która przechodzić ma przez środki dwóch boków podstawy i przez jeden z wierzchołków drugiej podstawy?

8. graniastosłup trójkątny prosty przetniemy płaszczyzną, któraby przechodziła przez jeden z boków podstawy i była nachylona pod kątem ostrym do tej podstawy? Wskazać kąt nachylenia.

9. równoległościan przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez dwie krawędzie do siebie równoległe i położone na różnych ścianach graniastosłupa?

10. ostrosłup trójkątny przetniemy płaszczyzną przez jedną z krawędzi bocznych i wysokość ostrosłupa?

11. Czy każdy ostrosłup, którego apotemy są równe, będzie prosty?

12. Wykreślić kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do jego podstawy.

13. Ostrosłup czworokątny przecięto płaszczyzną, przechodzącą przez jeden z boków podstawy. Jaka figura wypadnie w przekroju i jaki będzie jej kąt nachylenia do podstawy ostrosłupa?

14. Ostrosłup prosty ma za podstawę romb. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną, przechodzącą przez jego wierzchołek i równoległą do mniejszej przekątnej podstawy. Jaką figurę otrzymamy w przekroju? Wykreślać kąt nachylenia tej płaszczyzny do podstawy.

15. W prostopadłościanie krawędzie nierówne są: a, b, c. Przez pierwszą z tych krawędzi poprowadzono płaszczyznę przekątną. Obliczyć pole przekroju.

16. W prostopadłościanie przekątne ścian nierównych są: a, b i c. Obliczyć pole jego powierzchni.

17. Sześcian o krawędzi a przecięto płaszczyzną, przesuniętą przez przekątne dwóch przyległych do siebie ścian. Obliczyć pole przekroju.

18. Graniastosłup prosty ma za podstawę sześciokąt foremny o boku a. Wysokość graniastosłupa jest h. Obliczyć powierzchnię (całkowitą) i objętość graniastosłupa.

19. Graniastosłup prosty, którego wysokość jest h, ma za podstawę trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości b. Obliczyć powierzchnię i objętość graniastosłupa.

20. Obliczyć powierzchnię i objętość graniastosłupa prostego, którego krawędź boczna jest b, a podstawą jest dziesięciokąt foremny o boku a.

21. Obliczyć powierzchnię i objętość graniastosłupa prostego, który ma wysokość $h = 8$ cm, a za podstawę trapez równoramienny o bokach: $a = 6$ cm, $b = 24$ cm i $c = 15$ cm.

22. Pole powierzchni prostopadłościanu $= 16$ m^2, jeden z jego wymiarów $= 0{,}4$ m; a suma dwóch pozostałych $= 5$ m. Obliczyć te wymiary i objętość.

23. W ostrosłupie podzielono jedną z krawędzi bocznych w stosunku 5 : 3 i przez punkt podziału poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy ostrosłupa. Wysokość ostrosłupa $= 16$ cm; na jakie części została ona podzielona przez tę płaszczyznę? W jakim stosunku będzie pole przecięcia do pola podstawy?

24. Ostrosłup, którego wysokość $= 8$ cm, przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy w taki sposób, że przecięcie jest równe połowie podstawy. W jakiej odległości od wierzchołka ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę?

25. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa foremnego, który ma apotemę $= 3$ cm, a za podstawę trójkąt równoboczny o boku $= 8$ cm.

26. Obliczyć powierzchnię trójkątnego ostrosłupa foremnego o wysokości $h = 85$ cm i boku podstawy $a = 144$ cm.

27. Sześciokątny ostrosłup foremny ma wysokość $= 70$ m, a bok podstawy $= 3$ m. Obliczyć jego powierzchnię.

28. Sześciokątny ostrosłup foremny ma krawędź boczną $b = 5$ cm, a bok podstawy $a = 6$ cm. Obliczyć jego powierzchnię.

29. W foremnym ostrosłupie ściętym czworokątnym apotema $l = 2$ cm a boki podstaw są: $a = 6$ cm i $a^1 = 3$ cm. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa.

30. W foremnym ostrosłupie ściętym sześciokątnym apotema $= 50$ cm, a boki podstaw: 8 cm i 1 cm. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa.

31. Foremny ostrosłup ścięty trójkątny ma wysokość $h = 3$ cm, a boki podstaw: 4 cm i 3 cm. Obliczyć jego powierzchnię.

(32—36). Mając krawędź a, obliczyć powierzchnię:

32. Czworościanu foremnego.

33. Ośmiościanu foremnego.

34. Dwudziestościanu foremnego.

35. Sześcianu foremnego.

36. Dwunastościanu foremnego.

37. Objętość trójkątnego graniastosłupa foremnego $= 16$ cm^3, wysokość $= 4$ cm. Obliczyć bok podstawy.

38. Obliczyć objętość graniastosłupa prostego, który ma powierzchnię $= 15$ cm^2, a za podstawę kwadrat o boku $= 0{,}6$ cm.

39. Obliczyć objętość graniastosłupa prostego, który ma powierzchnię $= 20$ cm^2, a za podstawę trójkąt równoboczny o boku $= 2$ cm.

40. Objętość graniastosłupa prostego $= 10$ m^3, a wysokość $= 1{,}6$ m. Obliczyć pole ściany bocznej, jeżeli wiadomo, że podstawą jest sześciokąt foremny.

41. Podać interpretację geometryczną wzorów:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

ROZDZIAŁ XIV.

Zastosowanie pojęcia granicy w geometrji.

§ 77. Pomiar długości okręgu i pola koła.

385. Z nauki o nieskończonych ciągach liczb znamy następujące **twierdzenie:**

Jeżeli dany jest nieskończony ciąg liczb:

$$a_1, a_2, a_3 \ . \ . \ . \ a_n, \ . \ . \ .$$

który jest stale rosnący i którego każdy wyraz jest mniejszy od pewnej określonej liczby (czyli tak zw. ciąg monotoniczny ograniczony zgóry), to taki ciąg jest zbieżny i posiada pewną granicę.

Analogiczną własność posiadać będzie ciąg stale malejący ograniczony zdołu.

Stąd już wynika **twierdzenie:**

Jeżeli dane są dwa ciągi nieskończone:

$$a_1, a_2, a_3, \ . \ . \ . \ a_n, \ . \ . \ .$$
$$b_1, b_2, b_3, \ . \ . \ . \ b_n, \ . \ . \ .$$

które mają następujące własności:

1) jeden jest stale rosnący, drugi zaś malejący;

2) wyrazy pierwszego są mniejsze od wyrazów drugiego;

3) różnica między dwoma odpowiedniemi wyrazami obu tych ciągów $(b_n - a_n)$ stale maleje i może stać się mniejsza od wszelkiej dowolnie małej liczby,

to te dwa ciągi są zbieżne i granicę mają wspólną.

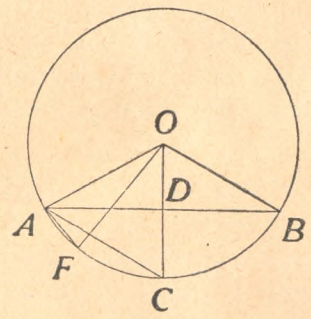
W naszych zastosowaniach geometrycznych posługiwać się będziemy zarówno pierwszem, jak drugiem twierdzeniem.

386. Ustaliwszy te pojęcia, przejdziemy do zagadnienia pomiaru długości okręgu, uprzednio jednak zauważmy co następuje:

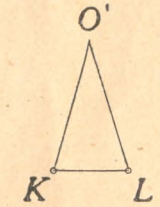
Jeżeli $AB = a_n$ jest bokiem wielokąta foremnego o n bokach wpisanego w dane koło (rys. 355), to pragnąc wpisać wielokąt o podwójnej liczbie boków, dzielimy łuk AB, albo kąt środkowy AOB na połowy i $AC = a_{2n}$. Dzieląc następnie $\sphericalangle AOC$ na połowy, podwoimy jeszcze liczbę boków i t. d.

Łatwo zauważyć, że im więcej boków ma wielokąt, tem długość jego boku jest mniejsza.

Otóż przekonamy się, że zawsze możemy wpisać w koło taki wielokąt foremny, którego bok będzie mniejszy od dowolnego, zgóry danego odcinka.



Rys. 355.



Rys. 356.

Niech np. takim odcinkiem będzie KL (rys. 356), wystawmy na nim trójkąt równoramienny $KO'L$ o boku $KO' = O'L =$ promieniowi danego koła i odmierzajmy kąt $KO'L$ w kącie AOB; niech on pomieści się np. m razy z pewną resztą, wtedy, dzieląc kąt AOB na 2, 4, 8 . . . i t. d., wogóle na 2^n części równych, zawsze możemy dobrać taką liczbę n, żeby $2^n > m$, czyli podzielić kąt AOB na części mniejsze od kąta $KO'L$. Jeżeli taką właśnie cząstką będzie $\sphericalangle AOF$, to będzie wtedy $AF < KL$ (z trójkątów AOF i $KO'L$), o co właśnie chodziło.

A zatem: jeżeli liczba boków wpisanego wielokąta foremnego wzrasta nieograniczenie, to jego bok nieograniczenie maleje i może być mniejszy od wszelkiego dowolnie małego odcinka.

Wnioski. Z trójkąta ODB mamy

$$OB - OD < DB,$$

oznaczając promień koła $OB = R$, apotemę OD wielokąta wpisanego o n bokach przez r_n, a bok $AB = a_n$, mamy

$$R - r_n < \frac{a_n}{2}.$$

Jeżeli teraz liczbę boków wielokąta będziemy podwajali nieograniczenie, to a_n będzie nieograniczenie malało, a więc różnica $R - r_n$ będzie nieograniczenie malała, dążąc do zera, t. j.

jeżeli liczba boków wielokąta foremnego wpisanego w koło nieograniczenie wzrasta, to jego apotema będzie wzrastała, dążąc do swej granicy, którą jest promień koła.

387. Wyobraźmy sobie teraz koło o promieniu R, wpiszmy w nie wielokąt foremny o n bokach (np. sześciokąt) i opiszmy na niem wielokąt foremny o tyluż bokach. Jeżeli teraz w każdym z tych wielokątów będziemy liczbę boków powiększali nieograniczenie np. przez podwajanie, to pamiętając, że z pomiędzy dwóch linij łamanych wypukłych obejmująca jest zawsze większa od obejmowanej, wnosimy, że:

1) obwody wielokątów foremnych, wpisanych w koło, stale wzrastają, jeżeli liczba ich boków stale się powiększa.

Oznaczając długości tych obwodów przez P_n, P_{2n}, P_{4n} . . . , otrzymamy nieskończony ciąg liczb, a więc i odcinków:

$$P_n,\ P_{2n},\ P_{4n} \quad . \quad . \quad .$$

Jeżeli teraz będziemy podwajali liczbę boków wielokąta opisanego, to otrzymamy:

obwody wielokątów foremnych, opisanych na kole, stale maleją, jeżeli liczba ich boków stale się powiększa.

Oznaczając te obwody przez P'_n, P'_{2n}, P'_{4n} . . . , będziemy mieli ciąg nieskończony malejący:

$$P'_n,\ P'_{2n},\ P'_{4n} \quad . \quad . \quad .$$

2) Obwody wielokątów wpisanych są mniejsze od obwodów wielokątów opisanych dla wiadomej już przyczyny.

3) Ponieważ wielokąty: opisany i wpisany o tej samej liczbie boków są do siebie podobne, więc będzie

$$\frac{P'_n}{P_n} = \frac{R}{r_n},$$

stąd zaś

$$P'_n - P_n = \frac{P'_n}{R} \cdot (R - r_n).$$

A że, jak widzieliśmy, różnica $(R - r_n)$ dąży do zera, jeżeli liczba n nieograniczenie wzrasta, wnosimy, że i lewa strona ostatniej równości, t. j. różnica $(P'_n - P_n)$ dąży również do zera, gdy n nieograniczenie wzrasta.

Na zasadzie otrzymanych wyników twierdzimy, że dwa nieskończone ciągi odcinków:

$$P_n,\ P_{2n},\ P_{4n} \quad . \quad . \quad .$$
$$P'_n,\ P'_{2n},\ P'_{4n} \quad . \quad . \quad .$$

są zbieżne i istnieje taki odcinek, który jest ich wspólną granicą.

Tę wspólną granicę nazywamy *długością okręgu*.

Ona nie będzie zależała od obranej dowolnie przez nas liczby n czyli od wyboru wielokąta początkowego (np. sześciokąta).

W ten sposób za długość okręgu uważa się długość odcinka, który jest większy od obwodów wielokątów wpisanych w koło, ale mniejszy od obwodów wielokątów opisanych; nie mogąc więc bezpośrednio wymierzyć długości okręgu, jako linji krzywej, przez porównanie z jednostką linjową, którą jest odcinek prostej, doszliśmy do pojęcia tej długości, jako odcinka równego, jakgdyby „wyprostowanemu" okręgowi.

To, co powiedzieliśmy o okręgu, dotyczeć będzie i jego części czyli łuku, a więc za długość łuku uważać będziemy długość takiego odcinka, który jest większy od wszystkich linij łamanych wpisanych w łuk, ale mniejszy od łamanych, na nim opisanych, czyli wspólną granicę dwóch nieskończonych ciągów, których wyrazami będą długości tych łamanych, gdy liczba ich odcinków będzie nieograniczenie wzrastała.

388. **Twierdzenie.** Okręgi dwóch kół tak się mają do siebie, jak ich promienie lub średnice.

Wyobraźmy sobie dwa okręgi: C i C'; pierwszy o promieniu R, drugi R'; jeżeli w każde z tych kół wpiszemy wielokąt o n bokach, to obwody tych wielokątów P_n i P'_n będą proporcjonalne do promieni:

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}.$$

Jeżeli teraz w każdem kole będziemy podwajali liczbę boków wpisanego wielokąta, to zawsze stosunek obwodów dwu wielokątów

o jednakowej liczbie boków pozostanie ten sam, jako zależny tylko od promieni danych kół.

Oznaczając długość pierwszego okręgu przez C, drugiego przez C', otrzymamy $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'}$.

Wnioski. 1) Przestawiając wyrazy średnie w otrzymanej proporcji, mamy

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'},$$

t. j. w każdem kole stosunek długości okręgu do średnicy jest liczbą stałą.

Wartość tego stosunku oznacza się literą grecką π (czytaj „pi"), więc

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Liczba π jest niewymierna, a jej przybliżonemi wartościami będą stosunki obwodów wielokątów wpisanych lub opisanych do średnicy koła.

Archimedes (III wiek przed Chr.) znalazł

$$\pi = \frac{22}{7},$$

wartość przybliżoną do 0,01, a w czasach późniejszych wielu matematyków obliczało tę wartość z coraz większą dokładnością, tak np. w wieku XVI *Ludolf van Ceulen* znalazł π z 35 cyframi dziesiętnemi:

$$\pi = 3,\ 141592653589793\ \ldots$$

i dlatego tę liczbę nazywają niekiedy *ludolfiną*.

Zwykle w rachunkach wystarcza dokładność do 0,01 czyli $\pi = 3,14$.

2) Z równości

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

mamy

$$C = 2\pi R,$$

t. j. długość okręgu jest równa średnicy, pomnożonej przez liczbę π.

Jeżeli np. $R = 8$ m, to długość okręgu będzie

$$C = 16\pi = 50,26 \text{ cm}.$$

389. **Zadanie.** Obliczyć długość łuku o n^0, jeżeli promień jest R.

Długość łuku l będzie tyle razy mniejsza od długości całego okręgu, ile razy ilość stopni łuku jest mniejsza od 360^0:

$$l : 2\pi R = n : 360,$$

stąd

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Np. jeżeli promień koła $= 12$ m, to łuk o 36^0 będzie miał długość:

$$l = \frac{12.36}{180}\pi = 2,4\pi = 7,53 \text{ m}.$$

Wniosek. Jeżeli w otrzymanym wzorze na długość łuku założymy $l = R$, to otrzymamy

$$n = \frac{180^0}{\pi} = 57^0\ 17'\ 44,8'';$$

tyle stopni zawierać będzie w sobie łuk, równy co do długości promieniowi koła.

Kąt środkowy, odpowiadający takiemu łukowi, nazywa się niekiedy radjanem i służy za jednostkę kątów (teoretyczna czyli bezwzględna miara kątów).

390. Powróćmy teraz do wielokątów wpisanych w koło i opisanych na niem; jeżeli weźmiemy pod uwagę pola tych wielokątów, to bez trudu będziemy mogli zrobić następujące spostrzeżenia:

1) Pola wielokątów foremnych, wpisanych w koło, stale wzrastają, jeżeli liczba ich boków stale się powiększa.

Oznaczając liczby wymiarowe tych pól literami S_n, S_{2n}, S_{4n}, i t. d., otrzymamy nieskończony ciąg rosnący:

$$S_n,\ S_{2n},\ S_{4n}\ \ldots,$$

co jest oczywiste.

Dla liczb wymiarowych pól wielokątów opisanych S'_n, S'_{2n}, S'_{4n} i t. d. otrzymamy ciąg malejący:

$$S'_n,\ S'_{2n},\ S'_{4n}\ \ldots$$

2) Pola wielokątów wpisanych są mniejsze od pól wielokątów opisanych.

3) Biorąc stosunek

$$\frac{S'_n}{S_n} = \frac{R^2}{r^2_n},$$

otrzymamy

$$S'_n - S_n = S'_n \cdot \left(\frac{R^2}{r_n^2} - 1\right).$$

Załóżmy teraz, że liczba boków tych wielokątów nieograniczenie wzrasta, wtedy, jak wiemy, r_n będzie dążyło do swej granicy R, więc różnica $\left(\frac{R^2}{r_n^2} - 1\right)$ dążyć będzie do zera, tak samo i różnica $S'_n - S_n$.

Stąd już wnosimy, że dwa ciągi nieskończone:

$$S_n,\ S_{2n},\ S_{4n},\ \ldots$$
$$S'_n,\ S'_{2n},\ S'_{4n}\ \ldots$$

są zbieżne i granicę mają wspólną.

Tę wspólną granicę nazywamy *polem koła.*

Wnioski. 1) Pole wielokąta foremnego jest równe połowie iloczynu jego obwodu i apotemy, więc dla wielokąta opisanego o n bokach będziemy mieli:

$$S'_n = {}^1/_2 \cdot P'_n \cdot R$$

(apotemą wielokąta opisanego jest promień koła), a że granicą P'_n podczas kiedy n wzrasta nieograniczenie, jest długość okręgu C, więc pole koła

$$K = C \cdot \frac{R}{2},$$

t. j. pole koła jest równe długości jego okręgu, pomnożonej przez połowę promienia.

Podstawiając jeszcze $C = 2\pi R$, mamy

$$K = \pi R^2,$$

t. j. pole koła jest równe kwadratowi jego promienia, pomnożonemu przez liczbę π.

Przykład. Promień koła $= 8$ cm, wtedy

$$K = 64\pi = 201{,}06 \text{ cm}^2.$$

Średnica koła $= d$, wtedy

$$K = \pi \cdot \frac{d^2}{4}.$$

2) Pole wycinka kołowego S można obliczyć z proporcji:

$$S : K = n : 360,$$

gdzie n oznacza liczbę stopni łuku.

Mianowicie

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Jeżeli podstawimy długość łuku $l = \frac{\pi R n}{180}$, to otrzymamy

$$S = l \cdot \frac{R}{2},$$

t. j. pole wycinka kołowego jest równe długości jego łuku, pomnożonej przez połowę promienia.

§ 78. O sposobach obliczania liczby π. Kwadratura koła.

391. Jeżeli promień koła weźmiemy równy jednostce długości, to długość okręgu $C = 2\pi R = 2\pi$, a więc π można obliczyć, jako połowę długości okręgu o promieniu $= 1$. Ale długość okręgu jest granicą obwodów wielokątów wpisanych i opisanych, więc należy w koło wpisać wielokąt foremny o n bokach, obliczyć jego obwód; potem opisać takiż wielokąt i znaleźć jego obwód; im więcej boków będą miały te wielokąty, tem mniejsza będzie różnica pomiędzy ich obwodami. Wtedy obwód jednego z nich można wziąć za przybliżoną długość okręgu.

Zacznijmy od sześciokąta.

Jeżeli $n = 6$, to

$$a_6 = R = 1$$
$$P_6 = 6 \cdot a = 6.$$

Znajdźmy teraz bok sześciokąta opisanego:

$$b_6 = \frac{a_6 \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}154700 \ \ldots$$

$$P'_6 = 6b_6 = 6{,}9282000 \ \ldots$$

Weźmy $n = 12$ i według wzoru na podwojenie znajdźmy a_{12}:

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = 0{,}517638.$$

$$P_{12} = 12a_{12} = 6{,}211657.$$

Mając a_{12}, możemy znaleźć b_{12} i P'_{12}.

Idąc tym sposobem dalej, otrzymamy:

n	P_n	P'_n
6	6,000000	6,928200
12	6,211657	6,630776
24	6,265257	6,319056
48	6,278700	6,292176
96	6,282064	6,285429
192	6,282905	6,283746
384	6,283115	6,283326
768	6,283168	6,283220
1536	6,283181	6,283194
3072	6,283184	6,283187

Z podanych szeregów liczb widać dokładnie, jak obwody wielokątów opisanych i wpisanych dążą do wspólnej granicy, którą jest okrąg koła. Biorąc ostatnie liczby, mamy

$$6{,}283184 < 2\pi < 6{,}283187.$$

Stąd

$$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$$

i z przybliżeniem do 0,00001 będzie:

$$\pi = 3{,}14159.$$

Archimedes zatrzymał się na 96 bokach i znalazł

$$3^{10}/_{71} < \pi < 3^{1}/_{7}.$$

392. Kwadraturą koła nazywa się zadanie o wykreśleniu kwadratu równoważnego z kołem.

Wielu matematyków usiłowało, bez skutku, rozwiązać to zadanie *), aż zostało dowiedzione, że π jest liczbą przestępną, a więc, że to zadanie zapomocą cyrkla i linjału rozwiązane być nie może.

Z tych prac pozostały dość liczne przybliżone sposoby. Godzien uwagi jest następujący sposób uczonego Polaka, *Adama Kochańskiego* (XVII wiek):

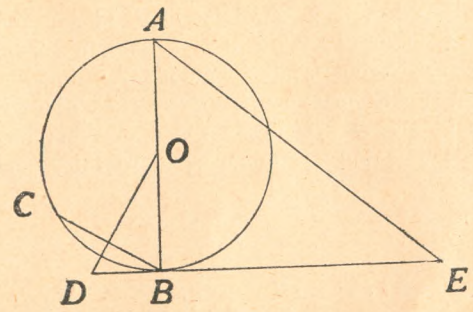
W kole poprowadźmy naprzód średnicę AB (rys. 357) i przez punkt B styczną, potem cięciwę $BC =$ promieniowi i ze środka O spuśćmy $OD \perp BC$. Jeżeli na stycznej od punktu D odmierzymy $DE =$ potrójnemu promieniowi i połączymy A i E, to odcinek AE jest przybliżoną długością półokręgu.

*) Pierwsze próby kwadratury koła robił podobno uczony grecki *Anaxagoras* w 430 roku przed Chrystusem.

Dowód. BD jest połową boku sześciokąta opisanego, więc

$$BD = \frac{R\sqrt{3}}{3},$$

$$BE = DE - BD = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) R,$$



Rys. 357.

a z $\triangle ABE$:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$= 4R^2 + \left(9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right) R^2$$

$$= \frac{40 - 6\sqrt{3}}{3} R^2.$$

Stąd

$$AE = \frac{\sqrt{40 - 6\sqrt{3}}}{3} R,$$

$$AE = 3{,}14153 \ . \ . \ . \ R.$$

Ale długość półokręgu równa się

$$\pi R = 3{,}14159 \ . \ . \ . \ R,$$

więc AE jest długością półokręgu, przybliżoną do 0,0001.

Ponieważ pole koła $= \pi R^2 = \pi R \,.\, R$, więc możemy już wykreślić prostokąt o podstawie $AE = \pi R$ i wysokości $OB = R$, równoważny z kołem. Mając prostokąt, łatwo go już zamienić na równoważny kwadrat.

Takie jest jedno z najprostszych przybliżonych rozwiązań kwadratury koła, dokonane przez Kochańskiego.

393. *Uwaga* Zagadnienie obliczenia liczby π oraz kwadratury koła interesowało ludzkość od bardzo odległych czasów, a najdawniejszy ślad tych poszukiwań znajduje się w *papyrusie Rhinda*, najdawniejszym znanym zabytku wiedzy matematycznej u Egipcjan, napisanym między 2000 — 1700 r.

przed Chrystusem przez *Ahmesa*. Tam już podana jest wartość $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, co daje 3,1605 — dokładność zdumiewająca na owe czasy.

Daleko mniejszą dokładność ($\pi = 3$) stosowali Babilończycy, a w pewnem miejscu Ksiąg Starego Testamentu w opisie świątyni Salomona znajduje się wzmianka o t. zw. „miedzianem morzu", którego średnica miała zawierać 10 łokci, a obwód 30 łokci *).

Dopiero *Archimedesowi* zawdzięczamy pierwszą naukową metodę rozwiązania tego zagadnienia. *Ludolf van Ceulen*, o którym już wspominaliśmy, posługiwał się w swych obliczeniach metodą Archimedesa, aż dopiero w późniejszych czasach, kiedy matematyka wyższa zrobiła poważne kroki w swym rozwoju, osiągnięto możność obliczania π z dowolną dokładnością, bez stosowania tak uciążliwej metody i wymagającej wielkiego nakładu czasu i pracy, metody obwodów.

§ 79. Objętość ostrosłupa.

394. Do ostrosłupów nie da się zastosować pojęcie równoważności, które niedawno napotkaliśmy w graniastosłupach przez podział ich na części równe, użyjemy tu metody granic, którą dopiero co posługiwaliśmy się dla pomiaru koła. Przedewszystkiem więc musimy ustalić pojęcie objętości ostrosłupa.

Niech będzie dany jakikolwiek ostrosłup $SABC$ (rys. 354) o wysokości $= h$, podzielmy ją na dowolną liczbę n części równych i przez punkty podziału poprowadźmy płaszczyzny równoległe do podstawy ABC. Wtedy w przecięciu z ostrosłupem otrzymamy szereg trójkątów.

Na podstawie ABC wystawmy graniastosłup v_1 o wysokości $\frac{h}{n}$, na pierwszem przecięciu wystawmy znowu graniastosłup v_2 o takiej samej wysokości i t. d., aż do ostatniego przecięcia; otrzymamy szereg graniastosłupów wystających, które nazwiemy „zewnętrznemi":

$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_n.$$

Następnie na ABC zbudujmy graniastosłup u_1, któryby za podstawę miał 1-sze przecięcie, a wysokość $\frac{h}{n}$; na pierwszem przecięciu zbudujmy graniastosłup u_2 o podstawie równej 2-mu przecięciu

*) „Uczynił też morze lane na *dziesiąci* łokiet od brzegu do brzegu, okrągłe wokoło; na piąci łokiet wysokość jego, a sznurek na *trzydzieści* łokiet opasował je w około".
(3. Księgi Królewskie, VII,23).

i wysokości $\frac{h}{n}$ i t. d., otrzymamy szereg graniastosłupów położonych wewnątrz danego ostrosłupa czyli „wewnętrznych", w liczbie $n-1$:

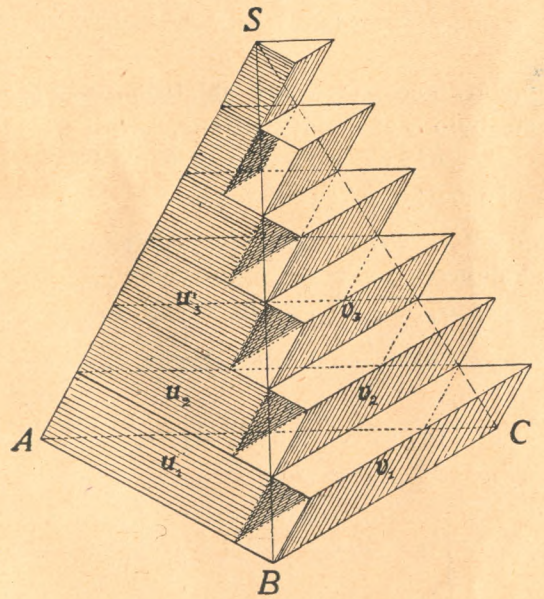
$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n-1}.$$

Nazwijmy dla skrócenia sumę „zewnętrznych" graniastosłupów literą V', — „wewnętrznych" literą U' i zauważmy, że

$$v_2 = u_1;\ v_3 = u_2;\ v_4 = u_3 \ldots v_n = u_{n-1},$$

a więc

$$V' - U' = v_1.$$



Rys. 358.

Objętość v_1 graniastosłupa umiemy obliczyć:

$$v_1 = (pole\ ABC) \cdot \frac{h}{n},$$

a ponieważ czynnik $\frac{h}{n}$ może być tak mały, jak tylko zechcemy

przez powiększanie liczby n, więc widzimy, że różnica $V'-U'$ stać się może dowolnie mała.

Jeżeli liczbę n części równych, na które podzielimy wysokość danego ostrosłupa, będziemy podwajali nieograniczenie i za każdym razem tworzyli bryły, złożone z graniastosłupów zewnętrznych i wewnętrznych, to otrzymamy dwa nieskończone ciągi liczb:

$$U',\ U'',\ U''',\ \ldots$$
$$V',\ V'',\ V''',\ \ldots$$

o których możemy powiedzieć, co następuje:

1) pierwszy ciąg jest rosnący, drugi zaś malejący,

2) wyrazy pierwszego ciągu są mniejsze od wyrazów drugiego i

3) różnica między wyrazami jednego i drugiego ciągu dąży do zera, jeżeli liczba n wzrasta nieograniczenie.

A zatem możemy twierdzić, że te dwa ciągi są zbieżne i mają granicę wspólną.

Tę wspólną granicę nazywamy **objętością ostrosłupa.**

Z tego, co było wyżej powiedziane, wynika, że dwa ostrosłupy o wysokościach równych, a podstawach równoważnych, mają objętości równe.

395. **Wniosek 1.** Oznaczmy pole podstawy danego ostrosłupa przez B, pola kolejnych przecięć, o których wyżej była mowa, licząc od podstawy, przez B_1, B_2, B_3, i t. d., wtedy, uważając, że przecięcie B_1 leży w odległości $(n\text{-}1)\frac{h}{n}$ od wierzchołka, mamy:

$$B_1 : B = \left[(n-1)\cdot\frac{h}{n}\right]^2 : h^2;\quad B_1 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot B$$

Podobnie

$$B_2 : B = \left[(n-2)\cdot\frac{h}{n}\right]^2 : h^2;\quad B_2 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \cdot B$$

$$B_3 : B = \left[(n-3)\cdot\frac{h}{n}\right]^2 : h^2;\quad B_2 = \left(\frac{n-3}{n}\right)^2 \cdot B$$

. . . . . .

$$B_{n-1} : B = \left[2\cdot\frac{h}{n}\right]^2 : h^2;\quad B_{n-1} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot B$$

$$B_n : B = \left[1\cdot\frac{h}{n}\right]^2 : h^2;\quad B_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot B$$

Ale suma objętości V' graniastosłupów zewnętrznych jest

$$V' = \frac{h}{n}(B + B_1 + B_2 + \ldots + B_n),$$

więc, pisząc $B = \left(\frac{n}{n}\right)^2 B$, mamy

$$V' = \frac{B.h}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2].$$

Ale $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\ ^*),$$

więc

$$V' = \frac{B.h}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^3:

$$V' = \frac{B.h}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

i załóżmy, że liczba n wzrasta nieograniczenie, wtedy ułamek $\frac{1}{n}$ dąży do zera i otrzymamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{B.h}{3}$$

---

*) Sumę $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ otrzymać można z tożsamości:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1,$$

podstawiając kolejno $k = 1, 2, 3, \ldots n$:

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$$
$$4^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Dodając stronami i oznaczając

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$

mamy

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n,$$

a że

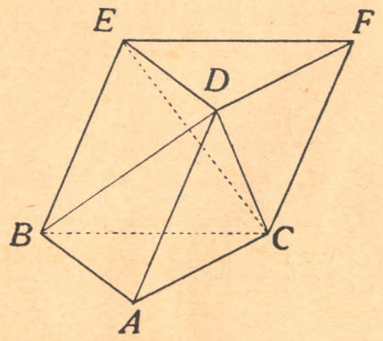
$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

więc znajdziemy stąd:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

t. j. objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części iloczynu jego pola podstawy i wysokości.

Uwaga. Wzór na objętość ostrosłupa można otrzymać drogą geometryczną w następujący sposób:



Rys. 359.

Zbudujmy graniastosłup trójkątny $ABCDEF$ (rys. 359) i płaszczyzną, przesuniętą przez krawędź BC oraz wierzchołek D, podzielmy go na dwa ostrosłupy:

$DABC$ i $DBEFC$.

Z nich pierwszy jest trójkątny, drugi zaś czworokątny, który możemy płaszczyzną przekątną DEC rozciąć na dwa ostrosłupy trójkątne i w ten sposób dany graniastosłup podzielimy na trzy ostrosłupy trójkątne:

1) $DABC$ 2) $DBEC$ i 3) $DEFC$.

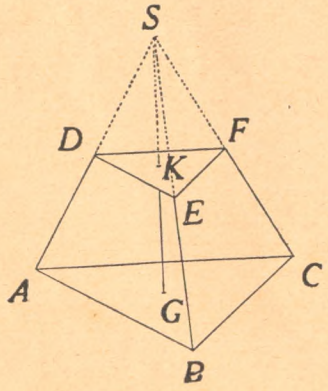
Możemy teraz udowodnić, że te ostrosłupy mają objętości równe sobie: Ponieważ $\triangle BEC = \triangle CEF$, więc ostrosłupy 2) i 3) mają podstawy równe, ale i wysokości mają równe (wierzchołek D jest wspólny, a podstawy leżą na tej samej płaszczyźnie), a zatem ich objętości są sobie równe.

Że zaś ostrosłupy 1) i 3) mają objętości równe, wynika stąd, że 3) jest to samo, co ostrosłup $CDEF$, który ma z 1) równą podstawę i wysokość.

W ten sposób widzimy, że objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części objętości graniastosłupa o tej samej podstawie i tej samej wysokości.

Dowód dotyczył ostrosłupa trójkątnego, łatwo jednak uogólnić wynik na ostrosłup wielokątny.

396. **Wniosek 2.** Objętość ostrosłupa ściętego możemy obliczyć w sposób następujący:



Rys. 360.

Niech będzie dany ostrosłup ścięty (rys. 360), którego większą podstawą jest ABC o polu B, mniejszą zaś DEF o polu B', wysokość niech będzie h. Jeżeli daną bryłę dopełnimy do ostrosłupa całkowitego przez przedłużenie krawędzi bocznych i oznaczymy literą z odległość górnej podstawy od otrzymanego wierzchołka, to objętość V danego ostrosłupa ściętego obliczyć można, jako różnicę między objętością ostrosłupa o podstawie B i wysokości $(h+z)$, a objętością ostrosłupa o podstawie B' i wysokości z, a więc

$$V = \frac{B\,.\,(h+z)}{3} - \frac{B'z}{3} = \frac{1}{3}\left[Bh + (B-B')\,.\,z\right] \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Ale

$$\frac{B}{B} = \frac{(h+z)^2}{z^2},$$

stąd mamy:

$$Bz^2 = B'h^2 + 2B'hz + B'z^2,$$

$$(B-B')z^2 - 2B'hz - B'h^2 = 0,$$

$$z = \frac{B' \pm \sqrt{B'^2h^2 + B'h^2\,(B-B')}}{B-B'},$$

biorąc znak dodatni, jako jedynie tu możliwy, jeżeli $B > B'$, otrzymamy

$$z = \frac{h(B' + \sqrt{BB'})}{B-B'}.$$

Podstawiając otrzymaną wartość na z w równanie (1), otrzymamy

$$V = \frac{1}{3}\left[Bh + (B' + \sqrt{BB'})\,.\,h\right]$$

czyli

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right).$$

Ponieważ w założeniu nie zrobiono zastrzeżenia, jaki ma być dany ostrosłup, więc oczywiście wzór stosuje się do ostrosłupa ściętego o dowolnej liczbie ścian bocznych.

Otrzymaliśmy wzór, który można wypowiedzieć w sposób następujący:

objętość ostrosłupa ściętego jest równa sumie objętości trzech ostrosłupów, które mają wysokość wspólną z danym, a za podstawy: jeden ma dolną, drugi górną, trzeci zaś średnią proporcjonalną między niemi.

Uwaga. Wzór na objętość ostrosłupa ściętego trójkątnego można otrzymać drogą geometryczną w następujący sposób:

Niech będzie dany ostrosłup ścięty (rys. 361), którego dolną podstawą jest $\triangle ABC$ o polu $= B$, górną $\triangle DEF$ o polu $= B'$.

Przez krawędź BC i wierzchołek D przesuńmy płaszczyznę, która daną bryłę podzieli na dwa ostrosłupy (całkowite):

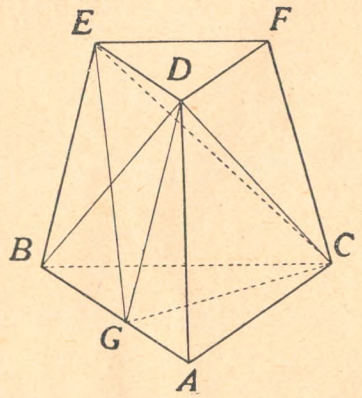
$DABC$ i $DBEFC$.

Z nich pierwszy jest trójkątny o podstawie $= B$ i wysokości równej wysokości ostrosłupa ściętego (h); drugi jest czworokątny, który możemy płaszczyzną przekątną DEC rozciąć na dwa trójkątne.

W ten sposób dana bryła została podzielona na trzy ostrosłupy trójkątne:

1) $DABC$; 2) $DEFC$; 3) $DBEC$.

Zauważmy, że ostrosłup 2) jest to samo, co ostrosłup $CDEF$, który ma podstawę $= B'$, a wysokość $= h$.



Rys. 361.

Ostrosłup 3) zastąpimy innym, pozostawiając podstawę BEC tę samą, a wierzchołek D przenosząc do punktu G po równoległej DG do BE (więc i do podstawy). Otrzymujemy nowy ostrosłup $GBEC$ o objętości takiej samej, jak 3); ale w otrzymanym ostrosłupie możemy za wierzchołek wziąć punkt E, za podstawę zaś $\triangle BGC$, wtedy ten ostrosłup ($EBGC$) będzie miał wysokość $= h$, a pole podstawy, które nazwiemy x, będzie średnie proporcjonalne między B i B', o czem łatwo się przekonać.

Istotnie

$$\frac{x}{B} = \frac{BG}{BA} = \frac{DE}{BA},$$

z drugiej strony $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$, więc

$$\frac{B'}{B} = \frac{DE^2}{BA^2},$$

a zatem

$$\frac{B'}{B} = \frac{x^2}{B^2}$$

czyli

$$x^2 = B \,.\, B'.$$

Stąd już otrzymujemy wzór na objętość ostrosłupa ściętego trójkątnego.

397. Jeżeli graniastosłup przetniemy płaszczyzną nierównoległą do podstawy, to bryłę, zawartą między podstawą a tą płaszczyzną, nazywamy graniastosłupem ściętym.

Objętość graniastosłupa ściętego trójkątnego obliczymy w następujący sposób:

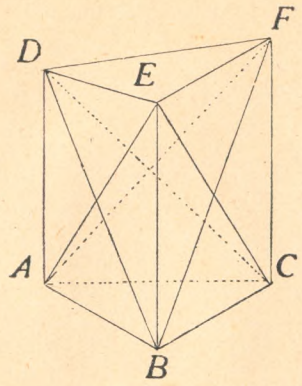
Niech będzie dany graniastosłup ścięty AF (rys. 362).

Płaszczyzną AEC podzielmy go naprzód na dwa ostrosłupy:

$EABC$ i $EADFC$.

Pierwszy jest trójkątny. Drugi $EADFC$ podzielmy płaszczyzną DEC na dwa trójkątne:

$EADC$ i $EDFC$.



Rys. 362.

Teraz graniastosłup dany podzielony został na trzy następujące ostrosłupy:

1) $EABC$, 2) $EADC$ i 3) $EDFC$.

Ostrosłup 2) można zastąpić ostrosłupem $BADC$ o tej samej objętości (podstawa ta sama, a wierzchołki E i B leżą na równoległej do podstawy), ten zaś ostrosłup jest to samo, co $DABC$, którego podstawą jest ABC, a wierzchołkiem punkt D.

Nareszcie ostrosłup 3) można znowu zastąpić ostrosłupem $BAFC$, którego podstawa AFC jest równoważna podstawie DFC, a wierzchołki B i E leżą na równoległej do podstaw. Ale ostrosłup $BAFC$ jest to samo, co $FABC$, którego podstawą jest ABC, a wierzchołek w punkcie F.

Widzimy zatem, że objętość graniastosłupa ściętego trójkątnego jest równa sumie objętości trzech ostrosłupów, które mają podstawę równą podstawie dolnej danego graniastosłupa, a wierzchołkami są wierzchołki górnej podstawy.

Nazwijmy pole dolnej podstawy B, a wysokości poszczególnych ostrosłupów h_1, h_2, h_3, wtedy będzie

$$V = B \,.\, \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}.$$

§ 80. Ćwiczenia.

1. Obliczyć długość okręgu, którego promień $= 28$ cm; 16 cm.
2. Obliczyć promień koła, jeżeli długość okręgu $= 42$ cm.
3. Długość okręgu wynosi a. Obliczyć pole koła.
4. Obliczyć długość łuku, zawierającego

30^0; 45^0; 52^0; $22^0\ 30'$,

jeżeli promień koła $= 12$ cm.

5. Ile stopni zawiera w sobie łuk o długości 16 cm, jeżeli promień koła $= 18$ cm?
6. Wyrazić w mierze teoretycznej (radjanach) kąty:

30^0; 90^0; 60^0; 48^0; $24^0\ 20'$

7. Jaką drogę przebiega na godzinę punkt, położony na równiku ziemskim, wskutek obrotu ziemi dokoła osi?

Promień równika wziąć okrągło 6000 km.

8. Wskazówka minutowa zegara na wieży ma długość 50 cm. Jaką drogę przebiegnie jej punkt końcowy w ciągu doby?
9. Okrąg pewnego koła jest dłuższy od jego średnicy o 25 cm. Jaka jest długość tego okręgu?

10. Łuk wycinka kołowego ma 90^0, a jego długość jest mniejsza od średnicy o 10 cm. Obliczyć promień.

11. Długość okręgu koła = 44 cm. Obliczyć jego pole.

12. Obliczyć pole wycinka kołowego, którego łuk = $36^0\ 20'$, a promień = 12 cm.

13. Obliczyć pole pierścienia kołowego, ograniczonego dwoma spółśrodkowemi okręgami o promieniach r_1 i r_2.

14. Pole kwadratu = 64 cm^2. Obliczyć pole koła, wpisanego w ten kwadrat.

15. Drewnianą tarczę kształtu koła o promieniu = 1,5 m trzeba obić z obu stron blachą miedzianą. Ile na to wyjdzie prostokątnych arkuszy blachy długości 0,5 m i szerokości 24 cm każdy?

16. Dane jest koło. O ile należy zmniejszyć jego promień, żeby długość okręgu zmniejszyła się o 20 cm?

17. Pole wycinka kołowego = 125 cm^2, promień = 15 cm. Obliczyć kąt wycinka i długość jego łuku.

18. Łuk wycinka kołowego o 45^0 ma długość 30 cm. Obliczyć pole wycinka.

19. Obliczyć pole odcinka kołowego, jeżeli promień koła = 10 cm, a łuk zawiera:

$$90^0;\ 45^0;\ 60^0;\ 36^0;\ 62^0;$$

20. Koło o promieniu r podzielono na połowy okręgiem spółśrodkowym z danym. Obliczyć jego promień.

(21—24). Wykreślić koło, którego pole jest równe:

21. sumie pól dwóch kół danych,

22. różnicy pól tych kół,

23. podwójnemu, potrójnemu polu koła danego,

24. połowie pola koła danego.

25. Z koła o promieniu r wycięto kwadrat w nie wpisany. Jakie jest pole pozostałych części koła?

26. Z sześciokąta foremnego o boku a wycięto koło w ten wielokąt wpisane. Jakie jest pole pozostałych części sześciokąta?

27. Dane jest półkole o średnicy = 2 r. Na obu połowach średnicy wykreślono dwa półkola, położone wewnątrz danego. Wykreślić koło styczne do trzech poprzednich półkoli.

Wskazówka. Promień żądanego koła = $\frac{r}{3}$.

28. Na bokach trójkąta prostokątnego wystawiono półkola położone z tej samej strony przeciwprostokątnej.

Udowodnić, że pola otrzymanych półksiężycowych figur dają w sumie pole danego trójkąta.

Są to tak zw. *księżyce Hipokratesa z Chiosu*, matematyka greckiego z V w. przed Chr.

29. Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego opisano zewnątrz trójkąta łuk kwadrantu (t. j. ćwiartkę całego okręgu), na przyprostokątnych opisano łuki kwadrantowe, ale wewnątrz trójkąta. Udowodnić, że pole figury ograniczonej wspomnianemi łukami jest równe polu trójkąta danego.

Figura, o której mowa w zadaniu, nosi nazwę *pelekoidy* (kształtem przypomina siekierę).

30. Średnicę półkola podzielono w pewnym punkcie na dwie części nierówne i na każdej z tych części wystawiono półkole wewnątrz pierwszego.

Udowodnić, że pole figury, ograniczonej temi trzema łukami, jest równe polu koła, którego średnicą jest prostopadła do średnicy, wystawiona z punktu styczności, ograniczona największym półokręgiem.

Figura, o której mowa w zadaniu, nosi nazwę *sierpa Archimedesa*.

31. Ostrosłup o wysokości = 15 cm ma za podstawę trójkąt, którego boki są: 13 cm, 14 cm i 15 cm. Obliczyć objętość ostrosłupa.

32. Obliczyć objętość ostrosłupa foremnego, którego wysokość jest h, a podstawą jest wielokąt foremny o boku a:

1) trójkąt; 2) kwadrat; 3) sześciokąt; 4) dziesięciokąt.

33. Obliczyć objętość ostrosłupa prostego, którego krawędź boczna jest b, a podstawa jest kwadratem o boku a.

34. Obliczyć objętość ostrosłupa prostego, którego krawędź boczna jest b, a podstawa jest foremnym:

1) sześciokątem, 2) dwunastokątem o boku a.

35. Obliczyć objętość foremnego ostrosłupa trójkątnego, którego krawędź boczna jest = 25 cm.

36. Obliczyć objętość foremnego ostrosłupa czworokątnego, którego krawędź boczna = 13 cm, a wysokość = 12 cm.

37. Objętość foremnego ostrosłupa sześciokątnego jest V, bok podstawy = a.

Obliczyć pole ściany bocznej.

38. Znaleźć stosunek objętości dwóch ostrosłupów foremnych, z których jeden jest sześciokątny, drugi trójkątny, w każdym zaś wysokość jest równa bokowi podstawy.

39. Obliczyć objętość foremnego trójkątnego ostrosłupa ściętego, którego wysokość = 10 cm, a boki podstaw: 8 cm i 5 cm.

40. Obliczyć objętość foremnego czworokątnego ostrosłupa ściętego, którego wysokość jest h, a boki podstaw: a i b.

41. Obliczyć objętość foremnego czworokątnego ostrosłupa ściętego, którego apotema = 6 cm, a boki podstaw: 5 cm i 3 cm.

(42—44). Mając krawędź a, obliczyć objętości foremnych wielościanów:

42. czworościanu;

43. ośmiościanu;

44. dwudziestościanu.

ROZDZIAŁ XV.

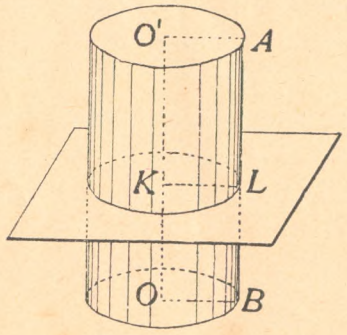
Bryły obrotowe.

§ 81. Walec.

398. **Określenia.** Bryła nazywa się obrotową, jeżeli powstała z obrotu pewnej figury płaskiej dokoła nieruchomej prostej, która nazywa się osią.

Walec obrotowy, czyli poprostu walec, jest bryłą, powstałą z obrotu prostokąta dokoła jednego z jego boków.

Jeżeli np. prostokąt $OO'AB$ (rys. 363) obraca się dokoła boku OO', to utworzy się walec. Punkty A i B opiszą wtedy okręgi kół, które nazywają się podstawami walca, a $OB=O'A$ są ich promienie, czyli promienie walca; prosta AB opisze powierzchnię krzywą, która się nazywa powierzchnią walcową; prosta AB nazywa się jej linją tworzącą. Odległość OO' pomiędzy podstawami nazywa się wysokością walca.



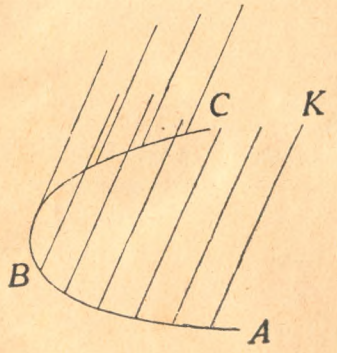
Rys. 363.

Przecięcie walca płaszczyzną prostopadłą do osi jest kołem, dlatego że prosta KL, leżąca na płaszczyźnie przecięcia, jest prostopadła do osi OO', a więc podczas obrotu prostokąta $OO'AB$ opisze promieniem KL koło na tej płaszczyźnie. Oczywiście, koło to będzie równe podstawie walca.

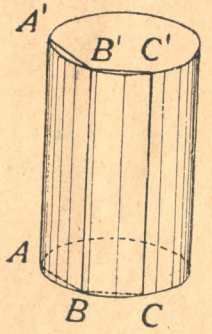
Przecięcie walca płaszczyzną, przechodzącą przez oś lub do niej równoległą, jest prostokątem, co jest oczywiste.

399. Przez powierzchnię walcową w sensie ogólniejszym rozumiemy taką, którą opisuje linja prosta AK (rys. 364), poruszająca się po konturze pewnej krzywej ABC, pozostając jednak równoległą do swego pierwotnego położenia. Prosta nazywa się tworzącą, a krzywa ABC—kierownicą. Jeżeli kierownicą jest okrąg koła, to walec jest kołowy; jest pochyły, jeżeli tworząca nie jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

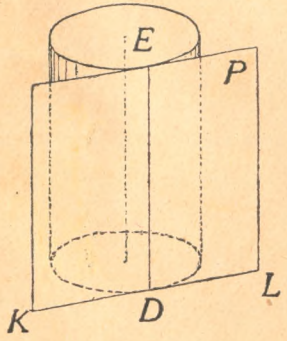
Nadal traktować będziemy wyłącznie o walcu kołowym prostym czyli obrotowym.



Rys. 364.



Rys. 365.



Rys. 366.

400. Jeżeli w podstawę walca (obrotowego) wpiszemy wielokąt $ABC\ldots$ i weźmiemy go za podstawę graniastosłupa o wysokości wspólnej z walcem (rys. 365), to graniastosłup nazywamy wpisanym w walec. Jego krawędzie boczne będą tworzącemi stożka.

Jeżeli na płaszczyźnie podstawy walca poprowadzimy prostą KL styczną do podstawy w punkcie D (rys. 366) i przesuniemy płaszczyznę P przez tę styczną i przez tworzącą DE, to nazywać się ona będzie płaszczyzną styczną do walca.

Opiszmy na podstawie walca wielokąt i wystawmy na nim graniastosłup o wysokości wspólnej z walcem, wtedy otrzymamy graniastosłup o p i s a n y na walcu. Jego ściany boczne będą styczne do powierzchni walcowej, a każdą linją styczności będzie jej tworząca.

401. **Powierzchnia boczna walca.** Niech będzie dany walec. Sposobem, o którym dopiero co mówiliśmy, wpiszmy w ten walec graniastosłup foremny o n ścianach bocznych, następnie opiszmy na walcu graniastosłup foremny o tyluż ścianach. Jeżeli obwód podstawy pierwszego graniastosłupa nazwiemy P_n, drugiego P'_n, wysokość h, to pola powierzchni bocznych tych graniastosłupów będą: $P_n . h$ i $P'_n . h$.

Jeżeli teraz liczbę ścian bocznych tych graniastosłupów będziemy podwajali nieograniczenie, to pola ich powierzchni bocznych będą:

$$P_n . h,\ P_{2n} . h,\ P_{4n} . h,\ \ldots$$
$$P'_n . h,\ P'_{2n} . h,\ P'_{4n} . h,\ \ldots$$

Otrzymamy w ten sposób dwa nieskończone ciągi liczb, z których jeden wyraża pola powierzchni bocznych graniastosłupów wpisanych w walec, a drugi opisanych.

Oczywistą jest rzeczą, że te ciągi będą zbieżne i granicę mają wspólną.

Ta wspólna ich granica nazywa się p o w i e r z c h n i ą b o c z n ą w a l c a.

Stąd już wynika, że dla obliczenia pola tej powierzchni należy znaleźć granicę $P_n . h$, a że granicą P_n jest $C = 2\pi R$ (gdzie R jest promieniem podstawy), więc pow. boczna walca

$$S = 2\pi R . h.$$

Pole powierzchni całkowitej znajdziemy, dodając pola podstaw:

$$S' = 2\pi R . h + 2\pi R^2 = 2\pi R (R + h).$$

402. **Objętość walca.** Powracając do graniastosłupów wpisanych w walec i opisanych na nim, oznaczmy pola ich podstaw odpowiednio przez:

$$B_n,\ B_{2n},\ B_{4n},\ \ldots$$
$$B'_n,\ B'_{2n},\ B'_{4n}\ \ldots$$

Objętości tych graniastosłupów utworzą znowu dwa nieskończone ciągi liczb:

$$B_n . h,\ B_{2n} . h,\ B_{4n} . h,\ \ldots$$
$$B'_n . h,\ B'_{2n} . h,\ B'_{4n} . h,\ \ldots$$

które będą zadość czyniły warunkom zbieżności.

Wspólną granicę tych ciągów nazywamy o b j ę t o ś c i ą w a l c a.

Stąd już wynika, że dla obliczenia objętości walca należy znaleźć granicę $B_n . h$, kiedy n wzrasta nieograniczenie, a że granicą B_n będzie pole podstawy walca czyli koła, więc objętość walca będzie

$$V = \pi R^2 . h,$$

gdzie R oznacza promień jego podstawy, a h wysokość.

§ 82. Stożek.

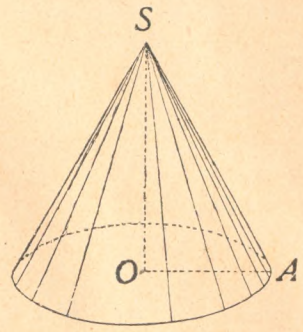
403. **Określenia.** S t o ż e k o b r o t o w y, czyli poprostu stożek, jest bryłą, powstałą z obrotu trójkąta prostokątnego dokoła jednej z przyprostokątnych.

Jeżeli np. trójkąt prostokątny SOA (rys. 367) obraca się dokoła boku SO, to otrzymamy stożek.

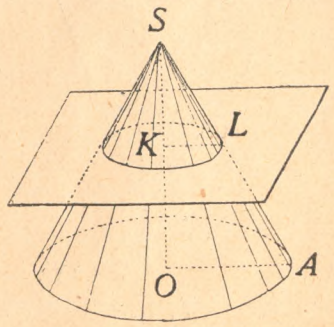
Punkt A opisze wtedy okrąg koła, które się nazywa p o d s t a w ą stożka, jego promień OA—p r o m i e n i e m stożka.

Prosta SA opisze powierzchnię krzywą, która się nazywa p o w i e r z c h n i ą s t o ż k o w ą, a prosta SA nazywa się linją t w o r z ą c ą.

Punkt S jest w i e r z c h o ł k i e m stożka, a jego odległość SO od podstawy—w y s o k o ś c i ą s t o ż k a.



Rys. 367.



Rys. 368.

Przecięcie stożka płaszczyzną prostopadłą do osi jest kołem (rys. 368), dlatego że prosta KL, jako leżąca na tej płaszczyźnie, jest prostopadła do osi, a podczas obrotu tworzącej SA dokoła osi punkt L opisze promieniem KL okrąg koła, które będzie leżało na tej płaszczyźnie.

Jeżeli płaszczyzna nie jest prostopadła do osi, nie jest przytem równoległa do osi, ani do tworzącej, to w przecięciu otrzymujemy elipsę.

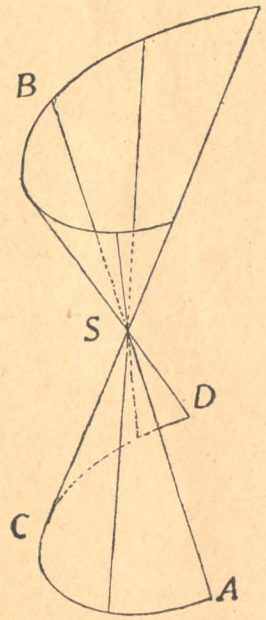
Przecięcie stożka płaszczyzną, przechodzącą przez oś, jest trójkątem równoramiennym, co jest oczywiste.

404. Przez powierzchnię stożkową w sensie ogólniejszym rozumiemy taką, którą opisuje linja prosta AB (rys. 369), kiedy jeden jej punkt S pozostaje nieruchomy, a inny (A) porusza się po konturze pewnej krzywej ACD.

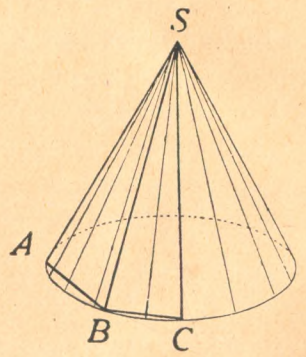
Prosta AB nazywa się tworzącą stożka, krzywa ACD jego kierownicą.

Jeżeli kierownicą jest okrąg koła, stożek nazywa się kołowym; jest pochyły, jeżeli jego oś nie jest prostopadła do podstawy.

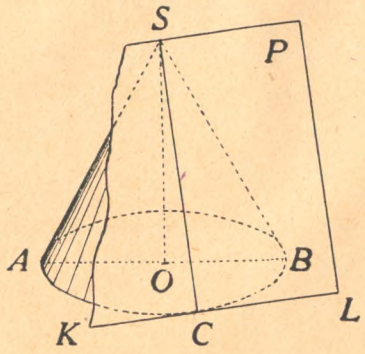
Nadal traktować będziemy wyłącznie o stożku kołowym prostym, czyli obrotowym.



Rys. 369.



Rys. 370.



Rys. 371.

405. Jeżeli w podstawę stożka wpiszemy wielokąt $ABC\ldots$ (rys. 370) i weźmiemy go za podstawę ostrosłupa o wysokości wspólnej ze stożkiem, to taki ostrosłup nazywamy wpisanym w stożek. Jego krawędzie boczne będą tworzącemi stożka.

Jeżeli na płaszczyźnie podstawy stożka poprowadzimy prostą KL (rys. 371) styczną do podstawy w punkcie C i przesuniemy płaszczyznę przez tę styczną i tworzącą SC, to ta płaszczyzna nazywać się będzie płaszczyzną styczną do stożka.

Opiszmy na podstawie stożka wielokąt i wystawmy na nim ostrosłup o wysokości wspólnej ze stożkiem, wtedy otrzymamy ostrosłup opisany na stożku. Jego ściany będą styczne do powierzchni stożkowej, a każdą linją styczności będzie jej tworząca.

406. **Powierzchnia boczna stożka.** Niech będzie dany stożek o wysokości h, promieniu podstawy R i tworzącej l. Wpiszmy w ten stożek ostrosłup foremny o n ścianach bocznych, następnie opiszmy na stożku ostrosłup foremny o tyluż ścianach. Nazwijmy obwód podstawy pierwszego ostrosłupa przez P_n, jego apotemę l_n; drugiego: obwód podstawy P'_n, apotemą zaś jego będzie tworząca stożka l. Wtedy pola powierzchni bocznych tych ostrosłupów będą:

$$\tfrac{1}{2} P_n . l_n \text{ i } \tfrac{1}{2} P'_n . l.$$

Jeżeli teraz liczbę ścian bocznych tych ostrosłupów będziemy podwajali nieograniczenie, to pola ich powierzchni bocznych będą:

$$\tfrac{1}{2} P_n . l_n,\ \tfrac{1}{2} P_{2n} . l_{2n},\ \tfrac{1}{2} P_{4n} . l_{4n},\ \ldots$$
$$\tfrac{1}{2} P'_n . l,\ \tfrac{1}{2} P'_{2n} . l,\ \tfrac{1}{2} P'_{4n} . l,\ \ldots$$

Otrzymamy dwa nieskończone ciągi liczb, które będą zbieżne i granicę mają wspólną.

Tę wspólną ich granicę nazywamy polem powierzchni bocznej stożka (krócej : powierzchnią boczną).

Stąd już wynika, że dla obliczenia pola tej powierzchni należy znaleźć granicę jednego z otrzymanych ciągów (np. drugiego), a że granicą P'_n jest $C = 2\pi R$, więc powierzchnia boczna stożka będzie

$$S = \pi R l.$$

Powierzchnię całkowitą znajdziemy, dodając pole podstawy

$$S' = \pi R l + \pi R^2 = \pi R (l + R).$$

407. **Objętość stożka.** Jeżeli pola podstaw ostrosłupów wpisanych w stożek i opisanych na nim oznaczymy odpowiednio przez:

$$B_n,\ B_{2n},\ B_{4n},\ \ldots$$
$$B'_n,\ B'_{2n},\ B'_{4n},\ \ldots$$

a wysokość stożka przez h, to objętości tych ostrosłupów utworzą znów dwa nieskończone ciągi liczb:

$$^1/_3 B_n . h,\ ^1/_3 B_{2n} . h,\ ^1/_3 B_{4n} . h,\ \ldots$$
$$^1/_3 B'_n . h,\ ^1/_3 B'_{2n} . h,\ ^1/_3 B'_{4n} . h,\ \ldots$$

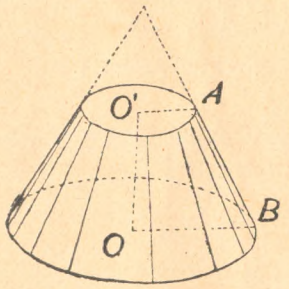
które będą zadość czyniły warunkom zbieżności.

Wspólną granicę tych ciągów nazywamy objętością stożka.

Stąd już wynika, że dla obliczenia objętości stożka należy znaleźć granicę $^1/_3 B_n . h$, a że granicą B_n, kiedy n wzrasta nieograniczenie, jest pole podstawy stożka czyli koła, więc objętość stożka będzie

$$V = {}^1/_3 \pi R^2 h.$$

408. **Określenia.** Jeżeli stożek przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, to część stożka, zawarta między podstawą a tą płaszczyzną, nazywa się stożkiem ściętym (rys. 372).



Rys. 372.

Stożek ścięty można uważać za bryłę, powstałą z obrotu trapezu prostokątnego $OO'AB$ dokoła boku OO'.

Koła O i O' nazywają się podstawami stożka ściętego, prosta AB tworzącą, a odległość OO' — wysokością.

Wnioski. Na zasadzie rozumowania, które nas doprowadziło do powierzchni i objętości stożka ściętego, otrzymamy:

1) Powierzchnia boczna stożka ściętego:

$$S = \pi (R + R') . l,$$

gdzie R i R' są to promienie podstaw, a l tworząca stożka ściętego.

2) Objętość stożka ściętego:

$$V = \frac{\pi h}{3} . (R^2 + R'^2 + RR'),$$

gdzie h oznacza wysokość stożka ściętego.

Uwaga. Jeżeli w stożku ściętym poprowadzimy przecięcie prostopadłe do osi, przechodzące przez środek tworzącej, to promień R_0 tego przecięcia (które nazywa się środkowem), będzie równy

$\frac{R + R'}{2}$, jako linja środkowa trapezu, a więc powierzchnia boczna będzie:

$$S = 2 \pi R_0 l,$$

t. j. pole powierzchni bocznej stożka ściętego równa się obwodowi przecięcia środkowego, pomnożonemu przez tworzącą.

§ 83. Kula.

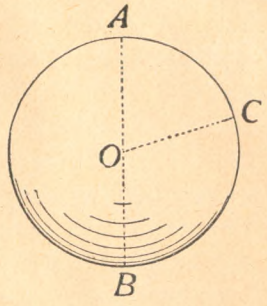
409. Kulą nazywa się bryła, powstała z obrotu półkola dokoła średnicy.

Jeżeli np. półkole ACB (rys. 373) obracać będziemy dokoła średnicy AB, to łuk ACB opisze powierzchnię krzywą, która się nazywa kulistą czyli sferyczną, a bryła nią ograniczona — kulą.

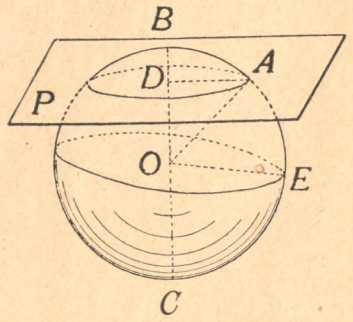
Środek O półkola nazywa się środkiem kuli. Odcinek, który łączy jakikolwiek punkt powierzchni kuli ze środkiem, nazywa się promieniem kuli, np. OC, a odcinek, który łączy dwa punkty kuli i przechodzi przez jej środek, nazywa się średnicą kuli, np. AB.

Oczywiście, wszystkie promienie i średnice w kuli są sobie równe i powierzchnia kulista jest miejscem geometrycznem punktów w przestrzeni, jednakowo odległych od danego punktu.

O punkcie mówimy, że leży zewnątrz lub wewnątrz kuli, zależnie od tego, czy jego odległość jest większa, czy mniejsza od promienia.



Rys. 373.



Rys. 374.

410. **Twierdzenie.** Przecięcie kuli jakąkolwiek płaszczyzną jest kołem.

Dowód. Na przecięciu kuli z płaszczyzną P (rys. 374) obierzmy dowolny punkt A i przez środek kuli O poprowadźmy średnicę BC prostopadłą do tej płaszczyzny.

Można powiedzieć, że dana kula powstała z obrotu półkola BAC dokoła średnicy BC, wtedy punkt A, leżący na łuku BAC, opisze okrąg promieniem DA, prostopadłym do BC i ten okrąg będzie leżał na płaszczyźnie P, co dowodzi twierdzenia.

411. Koło, otrzymane z przecięcia kuli płaszczyzną, nazywa się kołem małem w kuli.

Jego promień $DA = r$ znajdujemy z $\triangle DAO$, w którym $OA = R$ jest promieniem kuli:

$$r = \sqrt{R^2 - DO^2}.$$

Stąd widać:

1) Im przecięcie jest bliższe środka kuli, tem promień jego jest większy.

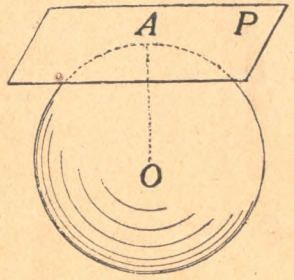
2) Jeżeli DO jest równe zeru, to $r = R$, to znaczy: jeżeli przecięcie przechodzi przez środek kuli, to jego promień równa się promieniowi kuli.

Takie przecięcie kuli nazywa się kołem wielkiem. Oczywiście, wszystkie koła wielkie są sobie równe.

3) Każde koło wielkie dzieli kulę na dwie części równe, dlatego że te części do siebie przystają.

4) Przecięcie się dwóch kół wielkich jest średnicą kuli, co jest oczywiste.

5) Dla poprowadzenia koła wielkiego wystarczy mieć dwa punkty na powierzchni kuli, dlatego że trzecim punktem, wyznaczającym jego płaszczyznę, będzie środek kuli.

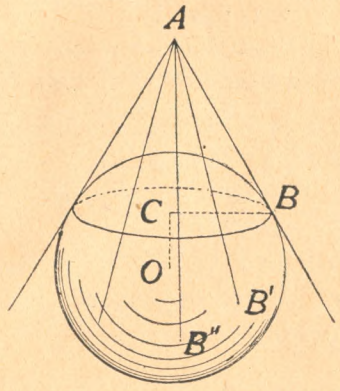


Rys. 375.

412. Płaszczyzna, która z kulą ma tylko jeden punkt wspólny, nazywa się płaszczyzną styczną do kuli, a ten punkt wspólny — punktem styczności, np. płaszczyzna P (rys. 375).

Promień OA, przechodzący przez punkt styczności, jest prostopadły do płaszczyzny stycznej, czego bardzo łatwo dowieść.

412. Prosta z powierzchnią kulistą nie może mieć więcej nad dwa punkty wspólne, dlatego że prosta z okręgiem może mieć najwyżej dwa punkty wspólne.



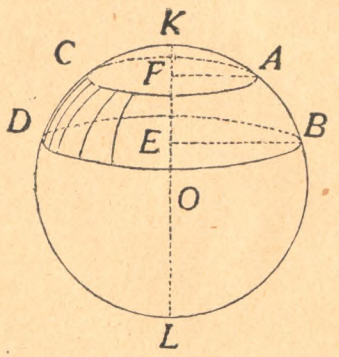
Rys. 376.

Prosta, która z powierzchnią kulistą ma tylko jeden punkt wspólny, nazywa się linją styczną do kuli, np. prosta AB (rys. 376).

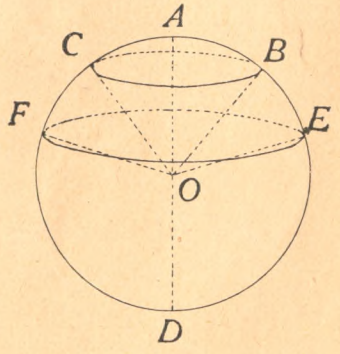
Oczywiście, z punktu A prostych stycznych do kuli można wyprowadzić nieskończenie wiele i ich miejscem geometrycznem będzie powierzchnia stożkowa styczna do kuli. Okrąg, opisany promieniem CB, będzie okręgiem styczności tego stożka z kulą.

Wynikać to będzie stąd, że jeżeli do półkola poprowadzimy styczną i całą figurę obracać będziemy dokoła średnicy, to styczna opisze powierzchnię stożkową, a punkt styczności okrąg.

413. **Określenia.** 1-o. Część powierzchni kulistej, zawarta między dwiema równoległemi płaszczyznami, nazywa się pasem kulistym, np. $ABCD$ (rys. 377), a bryła, ograniczona pasem kulistym i dwoma kołami — warstwą kulistą.



Rys. 377.



Rys. 378.

Koła DB i CA nazywają się podstawami, a ich odległość EF — wysokością pasa lub warstwy.

Warstwa kulista *ABCD* jest bryłą, powstałą z obrotu figury *ABEF* do koła osi *KL*.

2-o. Każda z dwóch części, na które dzieli kulę płaszczyzna, nazywa się odcinkiem kulistym (czaszą), np. *CKA*.

Koło *CA* jest podstawą odcinka, a odcinek *KF* — wysokością.

Odcinek kulisty *CKA* powstał z obrotu figury *KAF* dokoła *KL*.

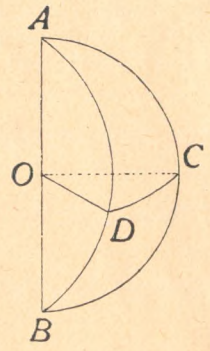
3-o. Bryła *CABOC* (rys. 378), powstała z obrotu wycinka kołowego *AOB* dokoła osi *AD*, nazywa się wycinkiem kulistym.

Jego podstawą jest część powierzchni kulistej *CAB*, a powierzchnią boczną — powierzchnia stożkowa.

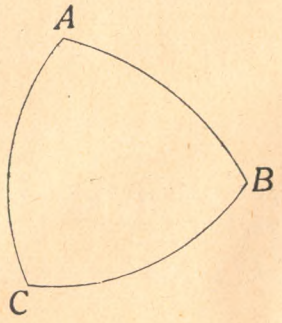
Jeżeli obracać będziemy dokoła osi *AD* (rys. 378) wycinek kołowy *OBE*, którego bok nie leży na osi, to otrzymamy bryłę, ograniczoną pasem kulistym i dwiema powierzchniami stożkowemi: zewnętrzną i wewnętrzną.

Taką bryłę nazywać będziemy wycinkiem kulistym wydrążonym.

4-o. Część powierzchni kulistej, zawarta między okręgami dwóch kół wielkich, nazywa się dwukątem kulistym albo taśmą (rys. 379).



Rys. 379.



Rys. 380.

Łuk *CD*, który otrzymujemy z przecięcia dwukąta kulistego płaszczyzną prostopadłą do osi *AB* i przechodzącą przez środek, nazywa się łukiem dwukąta kulistego (taśmy).

5-o. Część powierzchni kulistej, zawarta między okręgami trzech kół wielkich, przecinającemi się po dwa, nazywa się trójkątem falistym, np. *ABC* (rys. 380).

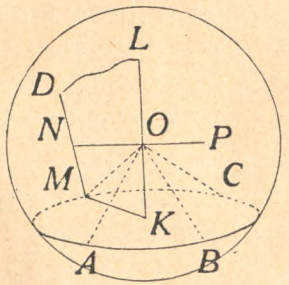
414. **Twierdzenie.** Cztery punkty, niepołożone na jednej płaszczyźnie, wyznaczają w zupełności kulę.

Dowód. Dane są cztery punkty w przestrzeni: *A*, *B*, *C* i *D* (rys. 381); trzeba dowieść, że istnieje taki punkt w przestrzeni, który jest w jednakowej odległości od czterech danych.

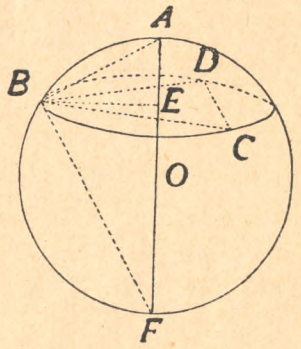
Przypomnijmy, że miejscem geometrycznem punktów, jednakowo odległych od *A*, *B* i *C* będzie prostopadła *KL*, wystawiona ze środka *K* okręgu, przechodzącego przez te trzy punkty. A więc szukany punkt musi leżeć na tej prostopadłej.

Jeżeli teraz przez tę prostopadłą i czwarty z danych punktów *D* poprowadzimy płaszczyznę, którą okrąg przetnie w punkcie *M*, to, wystawiwszy ze środka odcinka *DM* prostopadłą *NP*, otrzymamy w przecięciu z *KL* punkt *O*, który jest żądany.

Oto jest środek kuli — jedyny, gdyż dwie proste *KL* i *NP* przecinać się mogą tylko w jednym punkcie (a przecinać się muszą, gdyż leżą na jednej płaszczyźnie i nie są równoległe); a więc przez cztery dane punkty tylko jedna może być poprowadzona powierzchnia kulista.



Rys. 381.



Rys. 382.

415. **Zadanie.** Znaleźć promień danej kuli.

Z pewnego punktu *A* (rys. 382) na powierzchni danej kuli zakreślamy dowolną odległością *AB* *) okrąg koła małego, na którym obieramy trzy dowolne punkty: *B*, *C* i *D*.

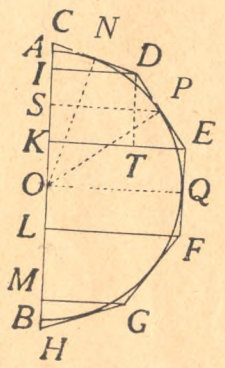
*) Do zakreślenia łuków na powierzchni kuli, jako też do mierzenia odległości punktów na niej używa się cyrkla o ramionach łukowato do siebie wygiętych.

Zmierzywszy cyrklem odległości BC, CD i BD, wykreślamy na papierze trójkąt równy BCD; na tym trójkącie opisujemy koło, którego promieniem będzie BE.

Ponieważ odległość AB może być zmierzona cyrklem, więc mając AB i BE, wykreślamy trójkąt prostokątny równy ABE.

Łatwo już teraz wykreślić trójkąt prostokątny równy $\triangle ABF$; połowa przeciwprostokątnej AF będzie promieniem danej kuli.

416. **Twierdzenie.** Pole powierzchni kuli jest równe poczwórnemu polu jej koła wielkiego.



Rys. 383.

Na półkolu AB (rys. 377) opiszmy łamaną foremną $CDEFGH$, o n odcinkach, z których EF jest równoległy do średnicy AB.

Obróćmy teraz całą figurę dokoła CH, wtedy utworzy się bryła obrotowa, ograniczona powierzchniami stożkowemi i walcowemi. Obliczmy pole powierzchni tej bryły.

Powierzchnia, utworzona z obrotu odcinka CD, będzie powierzchnią boczną stożka, którego tworzącą jest CD, a promieniem podstawy jest prostopadła DI do osi, a więc

$$pow.\ (CD) = \pi . CD . ID.$$

Iloczyn $CD . ID$ można przekształcić na mocy podobieństwa trójkątów CON i CDI ($\sphericalangle CON = \sphericalangle CDI$; $\sphericalangle CNO = \sphericalangle CID$), mianowicie

$$\frac{ID}{ON} = \frac{CI}{CN},$$

skąd

$$ID . CN = ON . CI,$$

a że CN jest połową CD, więc

$$ID . CD = 2ON . CI.$$

A zatem $$pow.\ (CD) = 2\pi ON . CI,$$

albo oznaczając promień ON przez R:

$$pow.\ (CD) = 2\pi R . CI \quad . \ . \ . \quad (1).$$

Zauważmy tu, że $2\pi R$ jest okręgiem koła wielkiego kuli, otrzymanej z obrotu półkola, a CI jest rzutem odcinka CD na oś obrotową.

Obliczmy teraz powierzchnię, powstałą z obrotu odcinka DE. Będzie to powierzchnia boczna stożka ściętego, którego tworzącą jest DE, promieniami podstaw są prostopadłe KE i ID, a odcinek PS będzie promieniem przecięcia środkowego tego stożka, a więc

$$pow.\ (DE) = 2\pi PS . DE.$$

Iloczyn $PS . DE$ można znowu przekształcić na mocy podobieństwa trójkątów PSO i DET ($\sphericalangle PSO = \sphericalangle DTE$ i $\sphericalangle SPO = \sphericalangle EDT$), mianowicie:

$$\frac{PS}{DT} = \frac{OP}{DE},$$

skąd $$PS . DE = OP . DT.$$

Podstawiając otrzymany iloczyn, mamy

$$pow.\ (DE) = 2\pi . OP . DT,$$
$$pow.\ (DE) = 2\pi R . IK \quad . \ . \ . \quad (2).$$

Zauważmy, że $2\pi R$ jest okręgiem koła wielkiego kuli, a IK rzutem odcinka DE na oś obrotową.

Obliczmy jeszcze powierzchnię, powstałą z obrotu odcinka EF. Będzie to powierzchnia boczna walca, którego tworzącą (albo wysokością) będzie EF, a promieniami podstaw są prostopadłe KE i LF, więc

$$pow.\ (EF) = 2\pi . LF . EF.$$

Ale $LF = OQ = R$, $EF = KL$, więc

$$pow.\ (EF) = 2\pi R . KL \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Zauważmy znowu, że KL jest rzutem odcinka EF na oś obrotową.

Powierzchni, powstałych z obrotu pozostałych odcinków, obliczać już niema potrzeby; możemy wprost napisać:

$$pow.\ (FG) = 2\pi R . LM \quad . \ . \ . \quad (4),$$
$$pow.\ (GH) = 2\pi R . MH \quad . \ . \ . \quad (5),$$

gdzie LM jest rzutem FG, a MH — rzutem GH.

Dodając teraz równości (1), (2), (3), (4) i (5), otrzymamy:

$$pow.\ (CDEFGH) = 2\pi R . (CI + IK + KL + LM + MH) = 2R\pi . CH,$$

t. j. pole powierzchni bryły, powstałej z obrotu linji łamanej foremnej, opisanej na półkolu, równa się

okręgowi koła wielkiego kuli, w tę bryłę wpisanej, pomnożonemu przez rzut tej łamanej na oś obrotową.

Załóżmy teraz, że liczba n odcinków łamanej przez podwajanie rośnie nieograniczenie, wtedy otrzymamy nieskończony ciąg liczb:

$$S_n,\ S_{2n},\ S_{4n}\ \ .\ .\ .$$

wyrażających pola powierzchni brył, powstałych z obrotu łamanych dokoła średnicy.

Łatwo się przekonać, że

1) ciąg wspomniany jest malejący, istotnie:

$$S_n = 2\pi R\,.\,CH;\ S_{2n} = 2\pi R\,.\,C'H',$$

gdzie $C'H'$ jest rzutem łamanej o $2n$ odcinkach na oś obrotu i $C'H' < CH$.

2) każdy wyraz tego ciągu jest większy od pewnej określonej liczby, czyli ciąg jest ograniczony jednostronnie (wynika stąd, że rzuty CH, $C'H'$ i t. d. będą większe od średnicy AB).

Wnosimy zatem, że omawiany ciąg posiada granicę. Tę właśnie granicę nazywamy polem powierzchni kulistej albo krócej: *powierzchnią kuli.*

Ponieważ rzutem półokręgu na oś obrotową jest średnica $AB = 2R$, więc pole powierzchni kuli będzie:

$$S = 2\pi R\,.\,2R$$

czyli

$$S = 4\pi R^2.$$

Wniosek. To, czego dowiedliśmy o łamanej opisanej na półkolu, będzie oczywiście słuszne i dla części łamanej, opisanej na jakiejkolwiek części półkola, a więc:

1) Pole powierzchni pasa kulistego obliczamy, mnożąc okrąg koła wielkiego przez wysokość pasa, dlatego że wysokość pasa będzie rzutem odpowiedniego łuku na oś obrotu.

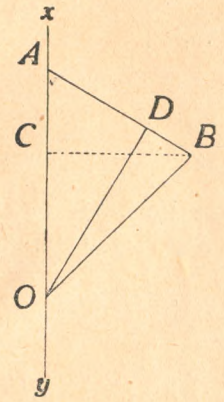
Więc powierzchnia pasa $S = 2\pi Rh$, gdzie R jest promieniem kuli, a h wysokością pasa.

2) Pole powierzchni odcinka kulistego otrzymamy, mnożąc okrąg koła wielkiego przez wysokość odcinka. Więc powierzchnia odcinka

$$S = 2\pi\, Rh,$$

gdzie R oznacza znowu promień kuli, a h wysokość odcinka.

Uwaga. Przez powierzchnię pasa lub odcinka rozumiemy tylko ich powierzchnie boczne, t. j. część powierzchni kulistej.



Rys. 384.

3) Powierzchnię dwukąta kulistego, którego łuk $= n^0$, obliczyć można z proporcji $S : 4\pi R^2 = n : 360$.

417. **Twierdzenie.** Objętość bryły, powstałej z obrotu trójkąta dokoła osi, położonej na płaszczyźnie trójkąta i przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków, równa się iloczynowi z pomnożenia pola powierzchni, powstałej z obrotu przeciwległego boku przez trzecią część wysokości trójkąta, odpowiadającej temu bokowi.

Dowód. Rozróżnimy tu trzy przypadki.

1-o. Jeden z boków trójkąta OAB leży na osi xy (rys. 384). Bryłą, utworzoną przez obrót trójkąta, będą dwa stożki, złożone podstawami.

Obliczmy każdą część objętości tej bryły:

$$obj.\ (\triangle ACB) = \frac{1}{3}\pi\,.\,CB^2\,.\,AC,$$

$$obj.\ (\triangle OCB) = \frac{1}{3}\pi\,.\,CB^2\,.\,OC.$$

Dodając, otrzymamy:

$$obj.\ (\triangle AOB) = \frac{1}{3}\pi\,.\,CB^2\,.\,OA$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,.\,CB\,.\,OA\,.\,CB.$$

Ale

$$OA\,.\,CB = AB\,.\,OD,$$

bo każdy z tych iloczynów jest podwójnem polem tego samego trójkąta OAB, więc

$$obj.\ (\triangle OAB) = \frac{1}{3}\pi\,.\,CB\,.\,AB\,.\,OD.$$

Zauważmy teraz, że $\pi \,.\, CB \,.\, AB$ jest polem powierzchni bocznej stożka, powstałej z obrotu boku AB, a więc

$$obj.\ (\triangle\ OAB) = \frac{1}{3}\, pow.\ (AB)\,.\,OD,$$

ostatecznie

$$obj.\ (\triangle\ OAB) = pow.\ (AB)\,.\,\frac{OD}{3}.$$

2-o. Bok danego trójkąta nie leży na osi (rys. 385).

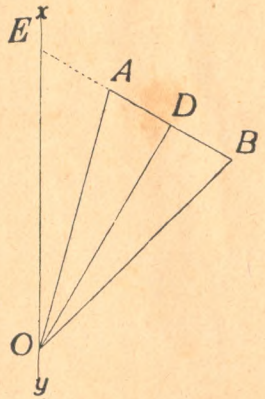
Przedłużmy bok AB do przecięcia z osią xy w punkcie E, wtedy mamy:

$$obj.\ (\triangle\ OEB) = pow.\ (EB)\,.\,\frac{OD}{3},$$

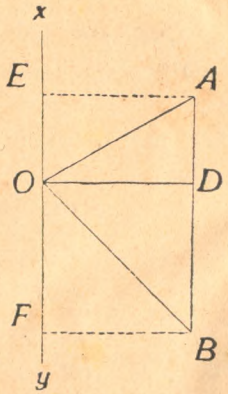
$$obj.\ (\triangle\ OEA) = pow.\ (EA)\,.\,\frac{OD}{3}.$$

Odejmując, otrzymamy

$$obj.\ (\triangle\ OAB) = pow.\ (AB)\,.\,\frac{OD}{3}.$$



Rys. 385.



Rys. 386.

3-o. Bok AB jest równoległy do osi (rys. 386). Wtedy będzie

$obj.\ (\triangle\ OAB) = obj.\ (FEAB) - obj.\ (\triangle\ OEA) - obj.\ (\triangle\ FOB)$.

Ale pierwsza z tych objętości jest objętością walca, a pozostałe dwie objętościami stożków, więc

$$obj.\ (FEAB) = \pi \,.\, OD^2 \,.\, EF,$$

$$obj.\ (\triangle\ OEA) = \frac{1}{2}\,\pi \,.\, EA^2 \,.\, OE$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi \cdot OD^2 \cdot OE;$$

$$obj.\ (\triangle\ FOB) = \frac{1}{3}\,\pi \cdot FB^2 \cdot OF$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi \cdot OD^2 \cdot OF.$$

A więc:

$$obj.\ (\triangle\ OAB) = \pi \cdot OD^2 \cdot \left(EF - \frac{OE + OF}{3} \right)$$

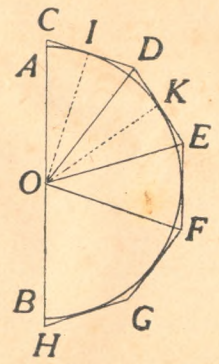
$$= \pi \cdot OD^2 \cdot \frac{2}{3}\, EF$$

$$= 2\pi \cdot OD \cdot EF \cdot \frac{OD}{3}$$

$$= 2\pi \cdot FB \cdot AB \,.\, \frac{OD}{3}$$

$$= pow.\ (AB)\,.\,\frac{OD}{3}.$$

418. **Twierdzenie.** Objętość kuli równa się iloczynowi z pomnożenia pola jej powierzchni przez trzecią część promienia.



Rys. 387.

Na półkolu AB (rys. 387) opiszmy łamaną foremną $CDEFGH$ o n odcinkach i obróćmy całą figurę dokoła osi, wtedy półkole opisze kulę, a cała figura bryłę, której objętość znajdziemy w następujący sposób:

$$obj.\ (\triangle\ OCD) = pow.\ (CD) \cdot \frac{OI}{3}$$

albo biorąc $OI = R$,

$$obj.\ (\triangle\ OCD) = pow.\ (CD) \cdot \frac{R}{3}$$

$$obj.\ (\triangle\ ODE) = pow.\ (DE) \cdot \frac{R}{3}$$

$$obj.\ (\triangle\ OEF) = pow.\ (EF)\,.\,\frac{R}{3}$$ i t. d.

Dodajemy te równości:

$$obj.\ (CDEFGH) = pow.\ (CDEFGH) \cdot \frac{R}{3}.$$

Załóżmy teraz, że liczba odcinków n wzrasta nieograniczenie, i utwórzmy ciąg nieskończony liczb, wyrażających objętości brył, otrzymanych z obrotu dokoła średnicy.

Ten ciąg będzie zbieżny i jego granicę nazywać będziemy objętością kuli.

Ponieważ granicą powierzchni $(CDEFGH)$ będzie powierzchnia kuli, więc twierdzenie jest udowodnione.

Jeżeli podstawimy wartość pola pow. kuli, otrzymamy wzór na objętość kuli:

$$V = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3}$$

czyli

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Wniosek 1. Z twierdzenia wnioskujemy, że objętość wycinka kulistego będzie równa jego powierzchni, pomnożonej przez $\frac{R}{3}$.

Ale powierzchnią (kulistą) wycinka jest powierzchnia odcinka (czaszy), której pole, jak już wiemy, równa się

$$2\pi R \cdot h,$$

gdzie h jest wysokością odcinka, a więc objętość wycinka kulistego będzie

$$V = 2\pi Rh \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

(pamiętać należy, że w tym wzorze h jest wysokością odcinka).

Wniosek 2. Objętość wycinka wydrążonego (rys. 388) obliczyć można, odejmując od objętości wycinka $ODEB$ objętość $OCEA$.

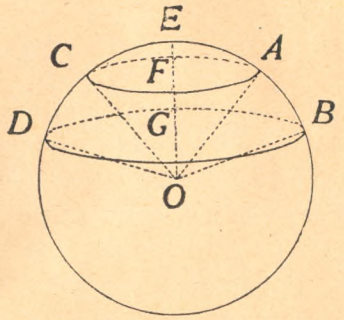
Mianowicie:

$$obj.\ (ODEB) = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot EG,$$

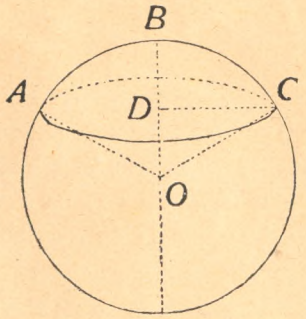
$$obj.\ (OCEA) = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot EF.$$

A więc objętość wycinka wydrążonego będzie

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot FG.$$



Rys. 388.



Rys. 389.

419. **Twierdzenie.** Objętość odcinka kulistego równa się objętości walca, który ma promień równy wysokości odcinka, a wysokość równą różnicy między promieniem kuli a trzecią częścią wysokości odcinka.

Dowód. Objętość V odcinka ABC (rys. 389) można obliczyć, jako różnicę między objętością V_1 wycinka $OABC$ i objętością V_2 stożka OAC.

Oznaczając promień kuli przez R, a wysokość BD odcinka przez h, mamy

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot DO.$$

Ale

$$DC^2 = h(2R - h)$$

$$DO = R - h,$$

więc

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi h\,(2R - h)\,(R - h)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 - 3Rh + h^2)$$

$$= \frac{2}{3}hR^2\pi - \pi Rh^2 + \frac{1}{3}\pi h^3$$

A zatem

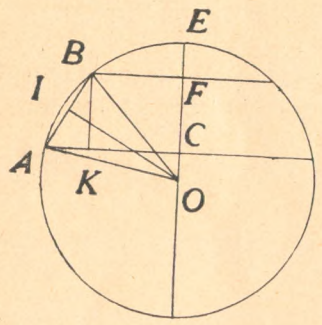
$$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \left(\frac{2}{3}\pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3}\pi h^3\right) = \pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

czyli

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

420. **Twierdzenie.** Objętość warstwy kulistej równa się objętości kuli o średnicy równej wysokości warstwy, więcej połowa sumy objętości dwóch walców, które mają wysokość wspólną z warstwą, a za podstawy: jeden podstawę dolną, drugi — górną warstwy.

Dowód. Znajdziemy naprzód objętość V_1 bryły powstałej z obrotu odcinka kołowego AB (rys. 390) dokoła średnicy. Ta objętość będzie różnicą między objętością V_2 wycinka kulistego wydrążonego, powstałego z obrotu wycinka kołowego AOB i objętością V_3 bryły, powstałej z obrotu $\triangle AOB$. Mamy więc, oznaczając promień kuli przez R, a wysokość FC warstwy przez h:



Rys. 390.

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

$$V_3 = pow.(AB).\frac{OI}{3}$$

$$= 2\pi 0I . FC . \frac{OI}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi h . OI^2.$$

Więc

$$V_1 = V_2 - V_3 = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{2}{3} h . OI^2$$

$$= \frac{2}{3}\pi h\,(R^2 - OI^2)$$

$$= \frac{2}{3}\pi h\,(R^2 - OI^2)$$

$$= \frac{2}{3}\pi h . AI^2$$

$$= \frac{2}{3}\pi h . \frac{AB^2}{4}$$

$$= \frac{1}{6}\pi h . AB^2.$$

Poprowadźmy $BK \perp AC$, wtedy

$$AB^2 = BK^2 + AK^2,$$

ale

$$BK = FC = h, \quad AK = AC - BF,$$

czyli oznaczając

$$AC = r, \quad BF = r_1,$$

mamy

$$AK = r - r_1,$$

a więc

$$AB^2 = h^2 + (r - r_1)^2$$
$$= h^2 + r^2 - 2rr_1 + r_1^2.$$

A zatem

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + r^2 - 2rr_1 + r_1^2)$$

Jeżeli teraz do tej objętości dodamy objętość stożka ściętego $ABFC$, która się równa

$$\frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1^2),$$

to otrzymamy objętość warstwy

$$V = \frac{1}{6}\pi h + \frac{1}{6}\pi h\,(3r^2 + 3r_1^2)$$

czyli

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}(\pi r^2 h + \pi r_1^2 h).$$

Pierwszy wyraz tego wzoru jest objętością kuli o średnicy h, zaś $\pi r^2 h$ i $\pi r_1^2 h$ są objętościami walców o wysokości h, a promieniach r i r_1, a to dowodzi twierdzenia.

Uwaga. Wzór na objętość warstwy kulistej można otrzymać inaczej w sposób następujący:

Objętość V warstwy jest równa różnicy objętości V' i V'' dwóch odcinków kulistych, z których pierwszy ma za wysokość EC (rys. 390), a drugi EF:

$$V = V' - V''.$$

Ale

$$V' = \pi . EC^2 . \left(R - \frac{EC}{3}\right) = \pi R . EC^2 - \frac{1}{3}\pi EC^3,$$

$$V'' = \pi . FE^2 . \left(R - \frac{EF}{3}\right) = \pi R . EF^2 - \frac{1}{3}\pi EF^3,$$

gdzie R oznacza promień kuli.

Odejmując od siebie te równości, mamy:

$$V = \pi . R(EC^2 - EF^2) - \frac{1}{3}\pi . (EC^3 - EF^3).$$

ale że

$$EC - EF = FC = h,$$

więc

$$V = \pi R . h\,(EC + EF) - \frac{1}{3}\pi h . (EC^2 + EC . EF + EF^2).$$

czyli po podstawieniu $EF = EC - h$:

$$V = \pi R \,.\, h \,.\, (2EC - h) - \frac{1}{3}\pi h \,.\, (EC^2 + EC^2 - h \,.\, EC + EC^2 -$$

$$- 2h \,.\, EC + h^2) = 2\pi Rh \,.\, EC - \pi R \cdot h^2 - \pi h \,.\, EC^2\,\pi^2 \,.\, EC - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Podstawmy jeszcze

$$EC = R - CO,$$

wtedy

$$V = 2\pi Rh\,(R - CO) - \pi \,.\, Rh^2 - \pi h\,(R^2 - 2R \,.\, CO + CO^2) +$$

$$\pi h^2 \,.\, (R - CO - \frac{1}{3}\pi h^2)$$

$$= \pi R^2 h - \pi h \,.\, CO^2 - \pi h^2 \,.\, CO - \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$= \pi h \,.\, (R^2 - CO^2 - h \,.\, CO) - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Ale z rysunku mamy

$$AC^2 = r^2 = R^2 - CO^2$$

$$BF^2 = r_1{}^2 = R^2 - (CO + h)^2,$$

stąd przez dodanie

$$r^2 + r_1{}^2 = 2R^2 - 2CO^2 - 2h \,.\, CO - h^2,$$

więc

$$\frac{r^2 + r_1{}^2 + h^2}{2} = R^2 - CO^2 - h \,.\, CO,$$

a zatem

$$V = \pi \frac{r^2 + r_1{}^2 + h^2}{2} \,.\, h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$= \pi \frac{r^2 + r_1{}^2}{2} \,.\, h + \frac{1}{2}\pi h^3 - \frac{1}{3}\pi h^3,$$

ostatecznie

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\,(r^2 h + r_1{}^2 h).$$

Wniosek. Jeżeli w otrzymanym wzorze założymy $r_1 = 0$, to otrzymamy wzór na objętość odcinka kulistego:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h.$$

Oczywiście ten wzór może być sprowadzony do znanego już z poprzedniego twierdzenia, jeżeli podstawimy

$$r^2 = h \,.\, (2R - h).$$

421. **Twierdzenie.** Objętość wszelkiego wielościanu opisanego na kuli równa się iloczynowi pola jego powierzchni i trzeciej części promienia kuli.

Dowód. Ścianami danej bryły są wielokąty; jeżeli wierzchołki każdego wielokąta połączymy ze środkiem kuli w tę bryłę wpisanej, to objętość bryły będzie się równała sumie objętości ostrosłupów,

których podstawami są ściany danej bryły i które mają wierzchołek w środku kuli.

Ponieważ kula jest styczną do ścian, więc promień kuli, przez punkt styczności poprowadzony, jako prostopadły do podstawy ostrosłupa, będzie jego wysokością. Objętość każdego z tych ostrosłupów będzie więc równa iloczynowi pola podstawy czyli jednej ze ścian danej bryły i trzeciej części promienia kuli, a zatem objętość całej bryły otrzymamy, mnożąc pole jej powierzchni przez trzecią część promienia kuli wpisanej.

§ 84. Ćwiczenia.

1. Powierzchnię walcową rozwinąć na płaszczyźnie. Obliczyć pole otrzymanej figury w zależności od promienia podstawy i wysokości walca.

2. Przecięto walec płaszczyzną nachyloną pod danym kątem do jego podstawy. Jaka będzie zależność pola przekroju od tego kąta?

3. Płaszczyzną równoległą do podstawy walca przeciąć jego powierzchnię boczną w danym stosunku.

4. Płaszczyzną równoległą do osi przeciąć walec w taki sposób, aby pole przekroju było równe a^2.

5. Przez punkt dany na pow. bocznej walca poprowadzić płaszczyznę styczną do tego walca.

6. W walcu promień podstawy = 12 cm, wysokość = 15 cm. Obliczyć jego powierzchnię boczną, całkowitą oraz objętość.

7. Wysokość walca = 10 cm, jego powierzchnia boczna = 124 cm^2. Obliczyć objętość.

8. Co się stanie z objętością walca, jeżeli promień jego podstawy powiększymy $m = 3$ razy.

9. Jak należy zmienić promień podstawy walca, żeby jego objętość zmniejszyła się 9 razy, jeżeli wysokość pozostawimy tę samą?

10. Znaleźć stosunek objętości dwóch walców o tej samej powierzchni bocznej, ale wymiarach różnych?

11. Znaleźć stosunek powierzchni dwóch różnych walców o tej samej objętości.

12. Znaleźć stosunek powierzchni bocznych i objętości walców, które powstały z obrotu prostokąta do koła różnych od siebie boków.

13. Walec, którego promień podstawy jest R, a wysokość h, przecięto płaszczyzną równoległą do jego osi w odległości a od niej. Obliczyć pole przekroju.

14. Obliczyć objętość walca opisanego na prostopadłościanie, którego wymiary są: a, b i c.

15. Podobnemi walcami nazywamy takie, których promienie podstaw i wysokości są do siebie proporcjonalne.

Znaleźć stosunek powierzchni i objętości walców podobnych.

16. Walcem równobocznym nazywamy taki, którego przekrój osiowy jest kwadratem.

W walcu równobocznym połączono punkt okręgu górnego z punktem okręgu dolnego (niepołożonym na tej samej tworzącej). Odcinek, który łączy te dwa punkty, jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α. Znaleźć najkrótszą odległość tego odcinka od osi walca; pr. podstawy $= R$.

17. Litr (miara płynów) ma kształt walca, którego wysokość jest dwa razy większa od średnicy jego podstawy, a objętość $= 1$ dcm^3. Obliczyć wysokość i promień podstawy litra.

18. Prostokąt obraca się naprzód dokoła jednego ze swych boków, a potem dokoła drugiego. Objętości dwóch walców, powstałych z tych obrotów, są: V i V'. Obliczyć przekątną prostokąta.

19. W walec wpisano foremny graniastosłup 6-kątny. Porównać jego powierzchnię i objętość z powierzchnią i objętością walca.

20. Powierzchnię stożkową rozwinąć na płaszczyźnie. Obliczyć pole otrzymanej figury w zależności od promienia stożka i tworzącej.

21. Przecięto stożek płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i nachyloną do podstawy pod kątem danym. Jaką figurę otrzymamy w przekroju?

22. Płaszczyzną równoległą do podstawy przeciąć stożek tak, aby w przecięciu otrzymać koło o promieniu danym.

23. Przez punkt, dany na powierzchni bocznej stożka, poprowadzić płaszczyznę do niego styczną.

24. Płaszczyzną równoległą do podstawy przeciąć powierzchnię boczną stożka w stosunku danym.

25. Obliczyć pole powierzchni bocznej i całkowitej oraz objętość stożka, którego promień podstawy $= 12$ cm, a tworząca $= 20$ cm.

26. Obliczyć pole powierzchni bocznej i całkowitej oraz objętość stożka, którego promień podstawy $= 10$ cm, a wysokość $= 24$ cm.

27. Stożek nazywa się r ó w n o b o c z n y m, jeżeli jego przecięcie osiowe jest trójkątem równobocznym.

Obliczyć objętość stożka równobocznego, mając promień jego podstawy $= R$.

28. Obliczyć pole powierzchni stożka równobocznego, jeżeli jego objętość $= V$.

29. Równoległobok obraca się naprzód dokoła jednego z boków, następnie dokoła innego (nierównego z pierwszym). Udowodnić, że stosunek objętości brył powstałych z tych obrotów, jest równy stosunkowi jednego z boków równoległoboku do wysokości względem drugiego boku.

30. Co się stanie z pow. boczną stożka, jeżeli promień jego podstawy zmniejszymy m razy a wysokość pozostawimy bez zmiany? Co się stanie wtedy z objętością stożka?

31. Stożek i walec mają wspólną podstawę i wspólną wysokość. Znaleźć stosunek powierzchni bocznych oraz objętości tych brył.

32. Stożki nazywamy p o d o b n e m i, jeżeli ich promienie podstaw i wysokości są do siebie proporcjonalne.

Znaleźć stosunek pól powierzchni (bocznych i całkowitych) oraz objętości stożków podobnych.

33. Stożek o wysokości h i promieniu podstawy R przeciąć płaszczyzną równoległą do podstawy w taki sposób, żeby powierzchnia boczna podzieliła się na połowy.

34. W jakiej odległości od wierzchołka stożka o promieniu podstawy R i wysokości h należy poprowadzić płaszczyznę sieczną równoległą do podstawy stożka, żeby jego powierzchnia boczna podzieliła się w stosunku $m : n$?

35. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość stożka ściętego, jeżeli promienie podstaw są: 12 cm i 20 cm, a tworząca $= 25$ cm.

36. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość stożka ściętego, jeżeli promienie podstaw są: 3 cm i 1,5 cm, a wysokość $= 4{,}5$ cm.

37. Rozwinąć na płaszczyźnie powierzchnię boczną stożka ściętego i obliczyć jej pole w zależności od promieni podstaw stożka i jego tworzącej.

(38—42). Obliczyć pole powierzchni całkowitej i objętość bryły, powstałej z obrotu foremnego wielokąta dokoła jednego z jego boków, którego długość jest a:

38. trójkąta,
39. kwadratu,
40. sześciokąta,
41. ośmiokąta,
42. dziesięciokąta.

43. Wielokąt foremny, wpisany w koło o promieniu R, obraca się dokoła osi położonej w jego płaszczyźnie, przechodzącej przez jeden z wierzchołków i prostopadłej do średnicy koła.

Obliczyć pole powierzchni całkowitej i objętość bryły, powstałej z tego obrotu, dla każdego z wielokątów, wymienionych w zadaniach poprzednich (38—42).

44. Jak znaleźć najmniejszą i największą odległość punktu od powierzchni kulistej?

45. Kulę przeciąć płaszczyzną w taki sposób, żeby w przecięciu otrzymać koło o promieniu a.

46. Przez punkt na powierzchni kulistej poprowadzić płaszczyznę do niej styczną.

47. Poprowadzić prostą styczną do kuli, równoległą do prostej danej.

48. Promieniem a opisać powierzchnię kulistą, która będzie przechodziła przez trzy punkty dane.

49. Promieniem a opisać powierzchnię kulistą, która ma być styczną do płaszczyzny danej w danym na niej punkcie.

(50—51). Znaleźć miejsce geometryczne środków kul opisanych promieniem a i stycznych do:

50. płaszczyzny danej,
51. prostej danej.

(52—55). Znaleźć miejsce geom. środków kul stycznych do:

52. dwóch prostych,
53. trzech prostych,
54. dwóch płaszczyzn,
55. kuli w punkcie danym na niej.

56. Udowodnić, że na każdym z wielościanów foremnych można opisać kulę, oraz wpisać w każdy kulę.

57. Obliczyć promień kuli opisanej na każdym z wielościanów foremnych, oraz promień kuli wpisanej.

58. Kulę o promieniu R przecięto płaszczyzną w odległości a od środka kuli. Obliczyć pole przecięcia.

59. Obliczyć pole powierzchni i objętość kuli, której promień = 15 cm.

60. Co się stanie z powierzchnią kuli, jeżeli jej promień powiększymy m razy?

61. O ile należy powiększyć promień kuli, żeby jej powierzchnia powiększyła się m razy?

62. Obliczyć pole powierzchni kuli, jeżeli łuk koła wielkiego, zawierający 60^0, ma długość 12 m?

63. Jaką długość ma 1^0 równoleżnika kuli ziemskiej pod 52^0 północnej szerokości geograficznej?

64. Obliczyć pole powierzchni krzywej odcinka kulistego, którego promień $= R$, a promień podstawy odcinka jest r.

65. Obliczyć objętość kuli, w której okrąg koła wielkiego ma długość a.

66. Co się stanie z objętością kuli, jeżeli jej promień zmniejszymy o a?

67. Objętość odcinka kulistego jest v, wysokość jest h. Obliczyć promień kuli, do której należy ten wycinek.

68. W kuli poprowadzono z jednej strony jej środka dwie równoległe płaszczyzny: jedną w odległości a, drugą b od środka. Obliczyć objętość warstwy kulistej.

69. Obliczyć objętość odcinka kulistego, którego wysokość = 24 cm, a promień podstawy = 3 cm.

70. W kuli o promieniu R poprowadzono płaszczyznę, która podzieliła powierzchnię kulistą w stosunku $m : n$. Obliczyć objętość otrzymanych odcinków kulistych.

(71—73). W kulę o promieniu R wpisano foremny ostrosłup w taki sposób, że jego wierzchołek leży na powierzchni kulistej, a wysokość przechodzi przez środek kuli. Mając krawędź boczną b tego ostrosłupa, obliczyć jego objętość, jeżeli podstawą jest foremny:

71. trójkąt,

72. czworokąt,

73. sześciokąt.

74. W ostrosłup foremny wpisać kulę styczną do jego podstawy i do ścian bocznych.

75. Trójkąt równoramienny o podstawie = 6 cm, a ramionach = 5 cm obraca się dokoła osi, przechodzącej przez wierzchołek trójkąta i równoległej do jego podstawy. Obliczyć pole powierzchni i objętość bryły, powstałej z tego obrotu.

76. Prostokąt o bokach a i b obraca się dokoła osi, położonej zewnątrz niego i poprowadzonej równolegle do boku b w odległości d od niego. Udowodnić, że objętość bryły, powstałej z tego obrotu, jest równa polu prostokąta pomnożonemu przez długość okręgu, który opisuje punkt przecięcia przekątnych prostokąta.

77. Na średnicy półkola wystawiono prostokąt opisany i poprowadzono w nim przekątną. Udowodnić, że z obrotu trzech figur: trójkąta, półkola i prostokąta do koła średnicy powstają trzy bryły, których objętości są w stosunku 1 : 2 : 3.

78. Na kole opisano kwadrat i trójkąt równoboczny, którego podstawa leży na podstawie kwadratu. Cała figura obraca się dokoła wysokości trójkąta. Znaleźć stosunek pól powierzchni całkowitych oraz stosunek objętości trzech brył powstałych z tego obrotu.

Wykazać, że pole powierzchni, jako też objętość bryły, powstałej z obrotu kwadratu, jest średnia proporcjonalna między dwiema pozostałemi.

79. W kuli o promieniu R podzielono średnicę w stosunku średnim i skrajnym i przez punkt podziału poprowadzono przecięcie prostopadłe do średnicy. Przecięcie wzięto za podstawę dwóch stożków, mających wierzchołki na przeciwległych końcach średnicy. Obliczyć objętość otrzymanego stożka podwójnego.

80. Dolna podstawa walca jest podstawą stożka, którego wierzchołek leży w środku podstawy górnej walca, górna zaś jego podstawa jest podstawą stożka, którego wierzchołek leży w środku podstawy dolnej. Obliczyć długość okręgu koła, według którego przecinają się powierzchnie obu stożków.

81. W naczynie stożkowe, umocowane pionowo i zwrócone wierzchołkiem na dół, nalano wody do wysokości a. Następnie wrzucono w to naczynie kulę żelazną o promieniu r, która całkowicie zanurzyła się w wodzie. Do jakiej wysokości podniósł się poziom wody? Promień podstawy stożka jest R, wysokość jest h.

82. Jaką część powierzchni kuli ziemskiej widzi lotnik, wzniósłszy się na wysokość a metrów?

Biblioteka Pedagogiczna w Chełmie

SKOROWIDZ NAZW I IMION WŁASNYCH.

	Str.
Ahmes	5
Alchwarizmi	160
Algebraiczna metoda konstrukcyj geom.	233
Algorytm	169
Almagest Ptolemeusza	255
Analiza zadania geom.	99
Anaxagoras	324
Apolonjusz z Pergi	200, 237
Apotema wielokąta	239
„ ostrosłupa	298
Archimedes	11, 304, 320, 326
Archimedesa pewnik	11, 122
Bolyai	67
Bryła geometryczna	2
Bryły obrotowe	336
Cechy równości trójkątów	30
„ podobieństwa „	190
„ równości naroży	290
Ceva	227
Ciało geometryczne	1
Cięciwa	24, 91
Clavius	67
Cosinus, cotangens	254
Czasza kulista	346
Czworokąty wpisane i opisane	113
Dedekind	211
Deltoid	80
Desargues	160, 162
Dascartes	304
Długość łuku	319
„ odcinka	211
„ okręgu	316, 319
Dodekaedr	306
Dopełnienie kąta	20
Dosieczna, dostawa, dotyczna	255
Dowód	4
Dwusieczna kąta	21, 41, 55, 180
Dwuścian	156
Egipski trójkąt	135, 249
Elipsa	165
Euklides	65
Euklidesa algorytm	169
„ postulat	66
„ twierdzenie	127
Euler	304
Figura geometryczna	4
Foremne wielokąty	238
„ wielościany	303
Funkcje trygonometryczne	252
Gauss	67, 83, 247
Gergonne	229
Gnomon	126
Gonjometryczne funkcje	254
Graniastosłup	294
Grzepski Stanisław	6
Harmoniczny podział odcinka	180
Heksaedr	306
Herodot	5
Heron z Aleksandrji	199, 273
Hipokrates z Chiosu	334
Hipparch z Rodosu	255
Ikosaedr	306
Inventum hecatumbae dignum	135

	Str.
Jednokładność figur . .	184
Kąt	14
„ bryłowy	287
„ dwuścienny	156
„ linjowy	156
„ nachylenia prostej do płaszczyzny	150
„ pełny i półpełny . .	17
„ prosty	19
„ widzenia	111
„ wpisany	107
„ wzniesienia	265
„ zewnętrzny trójkąta .	25, 42
Kąty jednostronne . . .	63
„ naprzemianległe . .	63
„ ostre i rozwarte . .	19
„ przyległe	18
„ wierzchołkowe . .	20
„ w kole	107
Kepler	199
Kochański Adam . . .	325
Koło	23, 85
„ Apolonjusza . . .	200
„ wpisane i opisane na trójkącie	82, 88
Koła styczne do siebie .	97
Konstrukcje podstawowe .	35
Konstrukcja Platońska. .	100
Kontur trójkąta	25
Kopernik Mikołaj . . .	255
Krzywa linja	3
Kula	343
Kwadrat	77
Kwadratura koła . . .	324
Liczba π	320
„ wymiarowa odcinka	211
Linja	1
„ potęgowa kół . .	231
Ludolf van Ceulen. . .	320, 326
Łamana linja	3
„ obejmowana i obejmująca . .	46
Łobaczewskij	67
Łuk	23, 91

	Str.
Menelaus	225
Metoda przekształcenia jednokładnego . . .	200
Miejsce geometryczne punktów . . . 54, 69, 90,	149
Mierzenie kątów i łuków .	212
„ odcinków . .	206
Muhamed-ibn-Musa. . .	169
Naroże.	287
Nasir Eddin	67
Objętość graniastosłupa .	313
„ kuli	353
„ ostrosłupa. . .	328
„ stożka	341
„ walca	338
Obraz symetryczny figury.	57
Obszar kątowy	15
Obwód trójkąta	25
Odcinek prostej. . . .	8
„ kulisty. . . .	346
Odległość dwóch punktów.	8
„ „ równoległych prostych . . .	69
Odległość dwóch skośnych.	155
„ punktu od okręgu	91
„ „ od płaszczyzny .	150
„ „ od prostej.	51
Okrąg.	22
Oktaedr	306
Ortocentrum trójkąta . .	83
Ostrosłup	298
Pappus z Aleksandrji . .	180
Papyrus Rhinda . . . 5,	325
Pas kulisty	345
Pelekoida	334
Pewnik, postulat . . .	4
Pewniki 6, 7, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 24, 30, 65, 66,	211
Pewnik Archimedesa . .	11, 122
„ Dedekinda . .	211
Pęk prostych	7
Pitagoras	134
Pitagorejczyków godło .	242
Planimetrja	13

	Str.
Platon 100,	308
Płaszczyzna 4,	12
Płaszczyzna prostopadła do prostej	145
Płaszczyzny do siebie prostopadłe	156
Płaszczyzny do siebie równoległe	152
Podobieństwo trójkątów .	190
Podział figur na części równoważne	133
Podział odcinka na części równe	71
Podział odcinka w stosunku średnim i skrajnym	199
Podział kąta na połowy .	38
Pole koła	322
„ wielokąta	269
„ wycinka kołowego .	322
Położenie 2-ch kół względem siebie	94
Poprzeczne linje w trójkącie	225
Postulat Euklidesa . .	66
„ de Zolta . . .	121
Pothénota zadanie . . .	116
Potęga punktu względem koła	229
Potęgowa linja dwóch kół	231
Powierzchnia	1
„ graniastosłupa	295
„ kuli i jej części	348
„ ostrosłupa .	301
„ stożka . . .	341
„ walca . . .	338
Półkole	24
Półpłaszczyzna	13
Półprosta	7
Promień koła	22
Proporcjonalność odcinków 171,	214
Proporcjonalne odcinki w trójkącie i kole . .	195
Prosta	6
„ prostopadła do płaszczyzny	141
Prosta równoległa do pł. .	151
Proste równoległe . . .	63
„ skośne	142
Prostopadła i pochyła 19, 49,	149
Prostokąt	77
Prostopadłościan . . .	297
Przekątna wielokąta . .	27
„ prostopadłościanu	297
„ płaszczyzna graniastosłupa	294
Przekątne równoległoboku	76
„ równoległościanu	297
Przekrój liczb	209
Przenośnik	214
Ptolemeusz . . . 67, 224,	255
Punkt	1
„ Gergonne'a. . .	229
Punkty szczególne w trójkącie	81
Radjan	321
Rhinda papyrus . . . 5,	325
Riemann.	67
Rinaldini	248
Romb	77
Rozciągłość	1
Równoległe proste . . .	63
„ płaszczyzny .	152
Równoległobok	75
Równoległoboki dopełniające	126
Równoległościan . . .	296
Równość naroży . . .	290
„ trójkątów . .	29
Równoważność wielokątów	117
Równoważność graniastosłupów	309
Równoważność równoległoboków	122
Równoważność równoległościanów	310
Rzut prostokątny . . . 49,	148
„ równoległy ukośny .	161
„ środkowy	158
Sectio aurea	199
Sezostrys	5
Siatka wielościanu . .	307
Sieczna w kole . . .	86
„ trygonometryczna	254
Sierp Archimedesa . .	335

	Str.
Sinus, secans	254
Skośne proste	142, 155
Spełnienie kąta . . .	18
Spółmierność odcinków .	167
Stereometrja	14
Stosunek odcinków . .	167, 206
Stożek	339
Styczna do koła . . .	86
„ do dwóch kół .	104, 189
„ trygonometryczna	254
Suma kątów trójkąta . .	73
Symetrja figur płaskich	56, 78, 90
Szczególne punkty w trójkącie	81
Środek ciężkości trójkąta	84
Środek potęgowy 3-ch kół	232
Środkowa trójkąta . . .	41, 83
„ trapezu . . .	79
Tales z Miletu . .	34, 110, 171
Tangens	254
Tetraedr	305
Trapez	78
Trójkąt	25
„ egipski	135
„ równoramienny .	26, 33
Trygonometryczne funkcje kąta	254
Twierdzenie	4, 48
„ Cevy . . .	227
„ Desargues'a .	160, 162
„ Euklidesa .	127, 272
Twierdzenie Eulera . .	304
„ Menelausa .	225
„ o gnomonie .	126
„ o trzech prostopadłych	150
Twierdzenie Pitagorasa .	134, 272
„ Ptolemeusza .	224
„ Talesa . .	171
Utwór geometryczny . .	1, 4
Walec	336
Wielokąt	27
Wielokąty foremne . .	238
Wielościany	293
„ foremne . .	303
Wspólna miara odcinków	167
Wstawa kąta	254
Wycinek kołowy . . .	322
„ kulisty . . .	346
Wysokość trójkąta . .	41
Wzór Herona	273
Zadania konstrukcyjne	35, 98, 127, 233, 280
Zadanie Apolonjusza . .	237
„ Pothénota . .	116
Zamiana figur	127
Zastosowania tw. Talesa .	176
Złoty podział odcinka .	199
de Zolta postulat . .	121
Związki metryczne w trójkącie i kole	217

Biblioteka Pedagogiczna w Łodzi

BIBLIOTEKA PEDAGOGICZNA
W CHEŁMIE

CZYTELNIA

ŻYD
GEO

51